科学计算中的量子算法：哈密顿量模拟

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

24-25 学年第 2 学期

大纲

- 不含时哈密顿量模拟（Time-independent Hamiltonian simulation）
  - 乘积公式（Product Formula）
  - 截断泰勒方法（Truncated Taylor method）
  - 其他方法
- 含时哈密顿量模拟（Time-dependent Hamiltonian simulation）

不含时哈密顿量模拟

$$i\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H|\psi(t)\rangle, \quad |\psi(0)\rangle = |\psi_0\rangle .$$

$$|\psi(t)\rangle = U(t)\,|\psi_0\rangle, \quad U(t) = e^{-iHt}.$$

目标：已知厄米矩阵 H 的一个输入模型，构造量子线路 V 使得

$$\|V - U(T)\| \le \epsilon.$$

复杂度：关于 H 的访问复杂度，门复杂度，线路深度

参数：范数 $\|H\|$，模拟时间 T，误差 ϵ

乘积公式

假设

$$H = H_0 + H_1$$

并假设 $e^{-iH_0 t}$ 和 $e^{-iH_1 t}$ 比较简单.

例子:

- Transverse field Ising model (TFIM):

$$H = -\sum_{j=0}^{n-2} Z_j Z_{j+1} - g\sum_{j=0}^{n-1} X_j$$

- 时空薛定谔方程:

$$H = -\Delta + V(x)$$

一阶乘积公式

思路：把 e^{-iHt} 分解成 $e^{-iH_0 s}$ 和 $e^{-iH_1 s}$ 的乘积

Lie-Trotter 乘积公式：

$$e^{-iHT} = \lim_{L\to\infty}\left(e^{-iH_1 T/L}e^{-iH_0 T/L}\right)^L$$

1 阶 Trotter 公式：

$$U_1(t) = e^{-iH_1 t}e^{-iH_0 t}$$

算法：把 $[0, T]$ 等分成 L 份，时间步长 $t = T/L$,

$$U(T) \approx (U_1(t))^L$$

一阶乘积公式：误差分析

局部舍入误差（可用泰勒展开证明）：

$$\|e^{-iHt} - e^{-iH_1 t} e^{-iH_0 t}\| \leq \mathcal{O}(t^2)$$

全局误差：

$$\|U(T) - U_1(t)^L\| \leq \mathcal{O}(Lt^2) = \mathcal{O}(T^2/L)$$

为了使误差小于 ϵ，访问复杂度为

$$L = \mathcal{O}(T^2/\epsilon)$$

二阶乘积公式

2 阶 Trotter/对称 Trotter/Strang 公式：

$$U_2(t) = e^{-iH_0 t/2} e^{-iH_1 t} e^{-iH_0 t/2}$$

局部舍入误差（可用泰勒展开证明）：

$$\| e^{-iHt} - e^{-iH_0 t/2} e^{-iH_1 t} e^{-iH_0 t/2} \| \leq \mathcal{O}(t^3)$$

全局误差：

$$\| U(T) - U_2(t)^L \| \leq \mathcal{O}(Lt^3) = \mathcal{O}(T^3/L^2)$$

为了使误差小于 ϵ，访问复杂度为

$$L = \mathcal{O}(T^{3/2}/\epsilon^{1/2})$$

高阶乘积公式：Trotter-Suzuki

Suzuki 迭代：

$$U_{2p+2}(t) = U_{2p}(s_p t)^2 U_{2p}((1-4s_p)t) U_{2p}(s_p t)^2, \quad s_p = (4 - 4^{1/(2p+1)})^{-1}$$

局部舍入误差：

$$\|e^{-iHt} - U_{2p}(t)\| \leq \mathcal{O}(t^{2p+1})$$

全局误差：

$$\|U(T) - U_{2p}(t)^L\| \leq \mathcal{O}(Lt^{2p+1}) = \mathcal{O}(T^{2p+1}/L^{2p})$$

为了使误差小于 ϵ，访问复杂度为

$$L = \mathcal{O}(T^{1+1/(2p)}/\epsilon^{1/(2p)})$$

- 每一个 $U_{2p}(t)$ 包含指数多项（$3 \times 5^{p-1}$ 项）
- 无法通过优化 p 改进到 $\mathcal{O}(T \operatorname{poly}\log(T/\epsilon))$

高阶乘积公式：一般形式

一般形式（系数 α_j, β_j 由阶条件确定）:

$$U_{\mathrm{PF}}(t) = \prod_{j=0}^{J-1} e^{-i\beta_j t H_1} e^{-i\alpha_j t H_0}$$

p 阶乘积公式的访问复杂度:

$$L = \mathcal{O}(T^{1+1/p}/\epsilon^{1/p})$$

- 仍必须包含指数多项，因此无法通过优化 p 改进到 $\mathcal{O}(T\,\mathrm{poly}\log(T/\epsilon))$

乘积公式：Commutator scaling

交换子（commutator）：

$$[A, B] = AB - BA$$

$$U_1(t) = e^{-iH_1 t} e^{-iH_0 t}$$

直观：当 $[H_0, H_1] = 0$ 时，$U_1(t) = U(t)$

乘积公式：Commutator scaling

1 阶 Trotter/2 阶 Trotter：

$$
\begin{aligned}
\|e^{-iHt} - U_1(t)\| &\leq \mathcal{O}(t^2 \|[H_0, H_1]\|) \\
\|e^{-iHt} - U_2(t)\| &\leq \mathcal{O}(t^3 (\|[H_0, [H_0, H_1]] + [H_1, [H_1, H_0]])\|)
\end{aligned}
$$

为了使误差小于 ϵ，访问复杂度为

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \mathcal{O}(\|[H_0, H_1]\| T^2/\epsilon) \\
L_2 &= \mathcal{O}((\|[H_0, [H_0, H_1]] + [H_1, [H_1, H_0]])^{1/2} T^{3/2}/\epsilon^{1/2})
\end{aligned}
$$

- 证明：常数变易公式 + 泰勒展开

乘积公式：Commutator scaling

高阶乘积公式：

$$\|e^{-iHt} - U_p(t)\| \leq \mathcal{O}(t^{p+1}\gamma_p), \quad \gamma_p = \sum_{\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_p \in \{0,1\}} \|[H_{\nu_p}, \cdots [H_{\nu_2}, [H_{\nu_1}, H_{\nu_0}]] \cdots]\|$$

访问复杂度：

$$L = \mathcal{O}(\gamma_p^{1/p} T^{1+1/p} / \epsilon^{1/p})$$

注意到 $\gamma_p^{1/p} \leq \mathcal{O}(\|H\|^{1+1/p})$，但具体例子中往往会更好

乘积公式小结

$$e^{-iHt} \approx U_{\mathrm{PF}}(t) = \prod_{j=0}^{J-1} e^{-I\beta_j t H_1} e^{-i\alpha_j t H_0}$$

- 1 阶 Trotter，2 阶 Trotter，Trotter-Suzuki
- 访问复杂度：$\mathcal{O}(\gamma_p^{1/p} T^{1+1/p}/\epsilon^{1/p})$，具有 commutator scaling
- 实现方式简单，仍然是最广泛应用的哈密顿量模拟算法（尤其是低阶 Trotter）

截断泰勒方法

$$U(t) = e^{-iHt}$$

假设已知 H 的一个 $(\alpha, a, 0)$-block-encoding，记为

$$U_H = \begin{pmatrix} H/\alpha & * & \cdots \\ * & * & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

截断泰勒方法：算法

考虑泰勒展开：

$$e^{-iHt} \approx \sum_{k=0}^{K-1} \frac{(-iHt)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{K-1} \frac{(\alpha t)^k}{k!}(-iH/\alpha)^k$$

算法思路：利用 LCU 实现泰勒展开

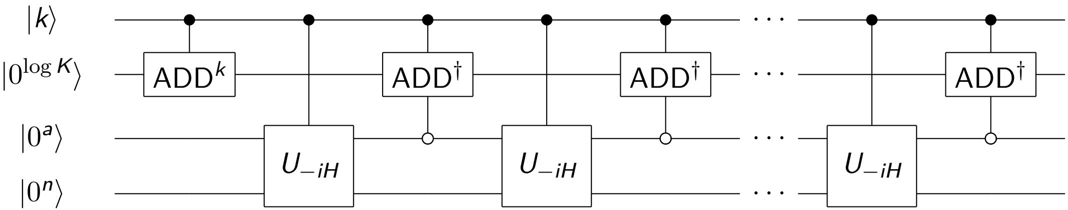
$$O_{\text{prep}} : |0\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{\|c\|_1}} \sum_{k=0}^{K-1} \sqrt{c_k}\,|k\rangle\,, \quad c_k = \frac{(\alpha t)^k}{k!}$$

$$O_{\text{sel}} = \sum_{k=0}^{K-1} |k\rangle\langle k| \otimes U_k,$$

其中 U_k 是 $(-iH/\alpha)^k$ 的 $(1, a', 0)$-block-encoding

截断泰勒方法：算法

O_{sel} 的实现：compression gadget



- ADD^k 受第一寄存器控制，可用类似于 QPE 线路的思想实现
- 第 j 组 U_{-iH} 和 $\mathrm{ADD}^\dagger$ 受控条件为 $k > j, j \in [K]$

访问复杂度：$\mathcal{O}(K)$， 额外量子比特：$\mathcal{O}(a + \log K)$

截断泰勒方法：算法

$$
\begin{aligned}
(O_{\mathrm{prep}}^{\dagger} \otimes I) U_{\mathrm{sel}} (O_{\mathrm{prep}} \otimes I) \left|0^{\log K}\right\rangle \left|0^{a'}\right\rangle |\psi\rangle &= \frac{1}{\|c\|_1} \left|0^{\log K}\right\rangle \left|0^{a'}\right\rangle \left(\sum_{k=0}^{K-1} \frac{(-iHt)^k}{k!} \right) |\psi\rangle + |\perp\rangle \\
&\approx \frac{1}{\|c\|_1} \left|0^{\log K}\right\rangle \left|0^{a'}\right\rangle e^{-iHt} |\psi\rangle + |\perp\rangle
\end{aligned}
$$

存在的问题：t 不能取太大，否则 $\|c\|_1 \sim e^{\alpha t}$ 是指数大的

截断泰勒方法：算法

$$(O_{\text{prep}}^\dagger \otimes I) U_{\text{sel}} (O_{\text{prep}} \otimes I) \left|0^{\log K}\right\rangle \left|0^{a'}\right\rangle |\psi\rangle \approx \frac{1}{\|c\|_1} \left|0^{\log K}\right\rangle \left|0^{a'}\right\rangle e^{-iHt} |\psi\rangle + |\perp\rangle$$

把 $[0, T]$ 划分成 $L = 2\alpha T$ 份，时间步长 $t = T/L$ 满足 $\alpha t \leq 1/2$

$$\frac{1}{\|c\|_1} \left|0^{\log K}\right\rangle \left|0^{a'}\right\rangle e^{-iHt} |\psi\rangle + |\perp\rangle \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \left|0^{\log K}\right\rangle \left|0^{a'+1}\right\rangle e^{-iHt} |\psi\rangle + |\perp\rangle$$

新的问题：成功概率随时间步数量 M 的增长而指数衰减

截断泰勒方法：算法

尝试：振幅放大（AA）

$$\text{LCU} \to \text{AA} \to \text{LCU} \to \text{AA} \to \cdots$$

新的问题：需要对当前量子态做对称，导致实现的嵌套，算法复杂度仍然是随 M 指数增长

解决方法：oblivious amplitude amplification (OAA)

OAA

（暂时先忽略截断误差）考虑两个酉变换 V 和 W，对于任意的量子态 $|\psi\rangle$，有

$$V|0\rangle|\psi\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle W|\psi\rangle + |\perp\rangle$$

一般形式：

$$V|0\rangle|\psi\rangle = \sin(\theta/2)|0\rangle W|\psi\rangle + \cos(\theta/2)|\Psi_1^{\perp}\rangle, \quad \Pi|\Psi_1^{\perp}\rangle = 0$$

$$\Pi = |0\rangle\langle 0| \otimes I$$

目标：放大 $|0\rangle W|\psi\rangle$ 的振幅，但不利用关于 W 或 $|\psi\rangle$ 的信息

OAA

$$V|0\rangle|\psi\rangle = \sin(\theta/2)|0\rangle W|\psi\rangle + \cos(\theta/2)|\Psi_1^\perp\rangle, \quad \Pi|\Psi_1^\perp\rangle = 0, \quad \Pi = |0\rangle\langle 0| \otimes I$$

关于“好”空间的对称：

$$R = I - 2\Pi$$

但 span$\{|0\rangle W|\psi\rangle, |\Psi_1^\perp\rangle\}$ 一般并不是 V 的不变子空间，定义

$$V|\Psi_0^\perp\rangle := \cos(\theta/2)|0\rangle W|\psi\rangle - \sin(\theta/2)|\Psi_1^\perp\rangle$$

OAA

$$V|0\rangle|\psi\rangle = \sin(\theta/2)|0\rangle W|\psi\rangle + \cos(\theta/2)|\Psi_1^\perp\rangle, \quad \Pi|\Psi_1^\perp\rangle = 0, \quad \Pi = |0\rangle\langle 0| \otimes I$$

如果 $\Pi|\Psi_0^\perp\rangle = 0$ **（我们将在最后证明这一点），那么**

$$V = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \end{pmatrix}_{\mathcal{X}_0 \to \mathcal{X}_1}, \quad V^\dagger = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \end{pmatrix}_{\mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_0}$$

$$\mathcal{X}_0 = \mathrm{span}\{|0\rangle|\psi\rangle, |\Psi_0^\perp\rangle\}, \quad \mathcal{X}_1 = \mathrm{span}\{|0\rangle W|\psi\rangle, |\Psi_1^\perp\rangle\}$$

同时注意到

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{X}_{i_0} \to \mathcal{X}_{i_1}}, \quad \forall i_0, i_1 \in \{0, 1\}$$

思路：考虑交替作用 R **和** $V, V^\dagger$

OAA：算法

考虑

$$S = -VRV^{\dagger}R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}_{\mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_1}$$

$$S\left(\sin(\beta)\,|0\rangle\, W|\psi\rangle + \cos(\beta)\,|\Psi_1^{\perp}\rangle\right) = \sin(\beta+\theta)\,|0\rangle\, W|\psi\rangle + \cos(\beta+\theta)\,|\Psi_1^{\perp}\rangle$$

$$S^k V|0\rangle\,|\psi\rangle = \sin((2k+1)\theta/2)\,|0\rangle\, W|\psi\rangle + |\perp\rangle$$

OAA：正交性验证

$$V|0\rangle\,|\psi\rangle = \sin(\theta/2)\,|0\rangle\,W|\psi\rangle + \cos(\theta/2)\,|\Psi_1^\perp\rangle\,, \quad \Pi\,|\Psi_1^\perp\rangle = 0, \quad \Pi = |0\rangle\,\langle 0| \otimes I$$

$$V|\Psi_0^\perp\rangle := \cos(\theta/2)\,|0\rangle\,W|\psi\rangle - \sin(\theta/2)\,|\Psi_1^\perp\rangle$$

考虑 $Q = (\langle 0| \otimes I)\, V^\dagger \Pi V (|0\rangle \otimes I)$，并记 $\sqrt{p} = \sin(\theta/2)$，可验证

$$\langle\psi|Q|\psi\rangle = p, \forall\,|\psi\rangle \implies Q = pI$$

因此

$$p\,|\psi\rangle = Q\,|\psi\rangle = \sqrt{p}\,(\langle 0| \otimes I)\, V^\dagger\,|0\rangle\,W|\psi\rangle = p\,|\psi\rangle + \sqrt{p(1-p)}\,(\langle 0| \otimes I)\,|\Psi_0^\perp\rangle$$

$$\implies \Pi\,|\Psi_0^\perp\rangle = 0$$

截断泰勒方法：最终算法

取 $L = 2\alpha T$，$t = T/L = 1/(2\alpha)$

1. 利用 LCU 实现 $V|0\rangle|\psi\rangle \approx \frac{1}{2}|0\rangle e^{-iHt}|\psi\rangle + |\perp\rangle$
2. 利用一步（robust）OAA 实现 $\widetilde{V}|0\rangle|\psi\rangle \approx |0\rangle e^{-iHt}|\psi\rangle$
3. 重复前两步 L 次，实现 $\widetilde{V}^L|0\rangle|\psi\rangle \approx |0\rangle e^{-iHT}|\psi\rangle$

访问复杂度：$\mathcal{O}(LK) = \mathcal{O}(\alpha TK)$

额外量子比特数：$\mathcal{O}(a + \log K)$

截断泰勒方法：复杂度分析

根据泰勒公式（并利用 $K^K \leq e^K K!$），

$$\left\| e^{-iHt} - \sum_{k=0}^{K-1} \frac{(-iH)^k}{k!} t^k \right\| = \left\| \int_0^t \frac{(-iH)^K}{(K-1)!} (t-s)^{K-1} ds \right\|$$
$$\leq \frac{\|H\|^K t^K}{K!} \leq \frac{1}{2^K K!} \leq \left(\frac{e}{2K} \right)^K$$

为了使得局部截断误差小于 $\epsilon' = \epsilon/L = \epsilon/(2\alpha T)$，可以取

$$K = \mathcal{O}\left(\frac{\log(1/\epsilon')}{\log\log(1/\epsilon')} \right) = \mathcal{O}\left(\frac{\log(\alpha T/\epsilon)}{\log\log(\alpha T/\epsilon)} \right)$$

访问复杂度：$\mathcal{O}\left(\alpha T \frac{\log(\alpha T/\epsilon)}{\log\log(\alpha T/\epsilon)} \right)$

额外量子比特数：$\mathcal{O}(a + \log\log(\alpha T/\epsilon))$

截断泰勒方法：小结

泰勒公式 +LCU+OAA

- 访问复杂度：$\mathcal{O}\left(\alpha T \frac{\log(\alpha T/\epsilon)}{\log\log(\alpha T/\epsilon)}\right)$
- 额外量子比特数：$\mathcal{O}(a + \log\log(\alpha T/\epsilon))$

AA：目前介绍了三个版本

- Grover：$U|0\rangle = \sqrt{p}\,|\psi_{\text{good}}\rangle + \sqrt{1-p}\,|\psi_{\text{bad}}\rangle$，对“好”和输入态做对称
- 子空间版 AA：$U|0\rangle|0\rangle = \sqrt{p}\,|0^a\rangle|\psi\rangle + |\perp\rangle$，对“好”的子空间和输入态做对称
- OAA：$U|0\rangle|\psi\rangle = \sqrt{p}\,|0\rangle V|\psi\rangle + |\perp\rangle$, U, V 是酉变换，对“好”的子空间和整体酉变换做对称（与输入态无关）
- SVA/USVA：可放松 OAA 中 V 是酉变换的要求，但无法将振幅完全放大到 1
- Fixed-point AA：无需 p 的事先估计，随着迭代次数的增多振幅越来越接近于 1
- ……

乘积公式 vs 截断泰勒

乘积公式复杂度:

$$\mathcal{O}(\gamma_p^{1/p} T^{1+1/p}/\epsilon^{1/p}), \quad \gamma_p = \sum_{\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_p\in\{0,1\}} \|[H_{\nu_p},\cdots[H_{\nu_2},[H_{\nu_1},H_{\nu_0}]]\cdots]\|$$

截断泰勒复杂度:

$$\mathcal{O}\left(\|H\| T \frac{\log(\|H\| T/\epsilon)}{\log\log(\|H\| T/\epsilon)}\right)$$

	T	ϵ	Commutator
乘积公式	$\mathcal{O}(T^{1+1/p})$	$\mathcal{O}(1/\epsilon^{1/p})$	有
截断泰勒	$\widetilde{\mathcal{O}}(T)$	$\mathcal{O}(\log(1/\epsilon))$	无

乘积公式 vs 截断泰勒：例子

$$-\partial_x^2 + V(x), \quad \text{周期边界}, \quad \max |V(x)| = \mathcal{O}(1)$$

采用 N 个格点的中心差分离散后得到 $H = H_0 + H_1$

$$\|H\| = \mathcal{O}(N^2), \quad \|[H_0, H_1]\| = \mathcal{O}(N)$$

（后者的连续版本推导：$[-\partial_x^2, V] = -V'' - 2V'\partial_x$）

一阶乘积公式 $\mathcal{O}(NT^2/\epsilon)$

截断泰勒方法：$\mathcal{O}\left(N^2 T \frac{\log(T/\epsilon)}{\log\log(T/\epsilon)}\right)$

其他方法

LCU 的随机化实现：减少线路深度、量子比特数量和控制操作

多乘积公式：结合乘积公式 commutator 依赖和截断泰勒的 $T.\epsilon$ 依赖

- 思路：外推法

$$U_{\mathrm{MPF}}(t) = \sum_{j=0}^{J-1} a_j U_2(t/k_j)^j$$

量子信号处理/奇异值变换：可达到理论下界 $\Omega\left(\|H\|T + \frac{\log(1/\epsilon)}{\log\log(1/\epsilon)}\right)$

随机化方法（例如 qDRIFT）：乘积公式的变种，克服哈密顿量项数过多的问题

……

含时哈密顿量模拟

$$i\frac{d\left|\psi(t)\right\rangle}{dt} = H(t)\left|\psi(t)\right\rangle, \quad \left|\psi(0)\right\rangle = \left|\psi_0\right\rangle.$$

$$\left|\psi(t)\right\rangle = U(t)\left|\psi_0\right\rangle$$

$$U(t) = \mathcal{T}e^{-i\int_0^t H(s)ds} := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^k}{k!}\int_0^t ds_1\int_0^t ds_2\cdots\int_0^t ds_k \mathcal{T}H(s_1)H(s_2)\cdots H(s_k)$$

$\mathcal{T}\exp$：**序指数**（ordered exponential）
$\mathcal{T}$：**时序算子**（time-ordering operator）

$$\mathcal{T}(AB) = \begin{cases} A(t_1)B(t_2), & t_1 > t_2 \\ B(t_2)A(t_1), & t_1 < t_2 \end{cases}$$

$H(t)$ **中的时间依赖对算法设计和复杂度分析都有新的要求**

含时哈密顿量模拟：乘积公式

考虑 $H(t)=H_0(t)+H_1(t)$，$[0,T]$ 分成 L 时间步，时间步长 $\Delta t=T/L$

一阶乘积公式：

$$U_1(t,\Delta t)=e^{-i\Delta tH_1(t)}e^{-i\Delta tH_0(t)}$$

二阶乘积公式：

$$U_2(t,\Delta t)=e^{-i\Delta tH_0(t_m)/2}e^{-i\Delta tH_1(t_m)}e^{-i\Delta tH_0(t_m)/2},\qquad t_m=t+\frac{1}{2}\Delta t$$

Suzuki 迭代：

$$\begin{aligned}U_{2p+2}(t,\Delta t)=&\,U_{2p}(t+(1-s_p)\Delta t,s_p\Delta t)U_{2p}(t+(1-2s_p)\Delta t,s_p\Delta t)\\&\times U_{2p}(t+2s_p\Delta t,(1-4s_p)\Delta t)U_{2p}(t+s_p\Delta t,s_p\Delta t)U_{2p}(t,s_p\Delta t),\\ s_p=&\,(4-4^{1/(2p+1)})^{-1}\end{aligned}$$

一般形式：$U_{\mathrm{PF}}(t,\Delta t)=\prod_{j=0}^{J-1}e^{-i\beta_j\Delta tH_1(t+\nu_j\Delta t)}e^{-i\alpha_j\Delta tH_0(t+\mu_j\Delta t)}$

含时哈密顿量模拟：推广乘积公式

一阶推广乘积公式：

$$U_1(t,\Delta t) = e^{-i\int_t^{t+\Delta t} H_1(s)ds} e^{-i\int_t^{t+\Delta t} H_1(s)ds}$$

二阶推广乘积公式：

$$U_2(t,\Delta t) = e^{-i\int_{t+\Delta t/2}^{t+\Delta t} H_0(s)ds} e^{-i\int_t^{t+\Delta t} H_1(s)ds} e^{-i\int_t^{t+\Delta t/2} H_0(s)ds}$$

高阶公式可用 Suzuki 迭代

要求我们能高效计算 $H_0(t)$ 和 $H_1(t)$ 的积分，常用于控制型哈密顿量：

$$H(t) = f_0(t)H_0 + f_1(t)H_1, \quad f_0, f_1 \in \mathbb{R}$$

Magnus 展开

$$U(t) = \mathcal{T} e^{-i\int_0^t H(s)ds} = e^{\Omega(t)}$$

$$\Omega(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k(t)$$

$$\Omega_1(t) = -i\int_0^t H(s)ds$$

$$\Omega_2(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 [A(s_1), A(s_2)]$$

$$\Omega_3(t) = \frac{i}{6}\int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 \int_0^t ds_3 \left([H(s_1), [H(s_2), H(s_3)]] + [H(s_3), [H(s_2), H(s_1)]]\right)$$

$\cdots\cdots$

积分可以离散后用 LCU 实现

截断 Dyson 方法

$$\mathcal{T} e^{-i\int_0^t H(s)ds} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 \cdots \int_0^t ds_k \mathcal{T} H(s_1) H(s_2) \cdots H(s_k)$$
$$\approx \sum_{k=0}^{K-1} \frac{(-i)^k}{k!} \int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 \cdots \int_0^t ds_k \mathcal{T} H(s_1) H(s_2) \cdots H(s_k)$$

进一步积分离散后，用 LCU+OAA 实现

访问复杂度：

$$\mathcal{O}\left(\alpha T \frac{\log(\alpha T/\epsilon)}{\log\log(\alpha T/\epsilon)}\right), \quad \alpha \geq \max_t \|H(t)\|$$

阅读

阅读：

- LL: Chapter 5