作业 1

1.

(1) 令 $[A,B]=AB-BA$ 表示矩阵 A 和 B 的交换子（commutator）. 证明

$$[X,Y]=2iZ,\quad [Y,Z]=2iX,\quad [Z,X]=2iY.$$

(2) 计算 HXH, HYH, HZH，结果用 Pauli 矩阵表示.

(3) 给出 $X\otimes X\otimes Z$ 分别作用在 $|000\rangle, |101\rangle, |111\rangle$ 上的结果.

2. 考虑一个单比特量子态 $|\psi\rangle=\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

(1) 证明 $|\psi\rangle$ 可被表示为

$$|\psi\rangle=e^{i\gamma}\left(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle+e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\right),\quad \gamma\in[0,2\pi),\theta\in[0,\pi),\phi\in[0,2\pi).$$

(2) 忽略全局相位 γ，每个量子态可以被表示成三维球面（被称为 Bloch 球）上的一个点

$$(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)^T.$$

试画出 Bloch 球的示意图，并标出 $|0\rangle$，$|1\rangle$ 和任意一个满足 $\theta\in(0,\pi/2),\phi\in(0,\pi/2)$ 的点.

(3) 解释 Hadamard 门在 Bloch 球上对应什么几何变换.

(4) 解释 Pauli 旋转门 $e^{-iX\theta/2}, e^{-iY\theta/2}, e^{-iZ\theta/2}$ 分别在 Bloch 球上对应什么几何变换.

3. 设 $U_0,U_1\in\mathbb{C}^{2^n\times 2^n}$ 为两个酉矩阵，$|\psi\rangle\in\mathbb{C}^{2^n}$ 是一个 n 比特量子态. 考虑图1中的量子线路.

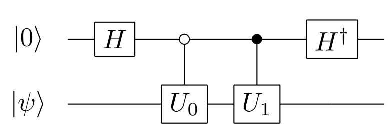

Figure 1:

(1) 试计算该量子线路的输出态.

(2) 如果我们在线路的最后对第一个量子比特在计算基下进行测量，给出第一个量子比特变为 0 的概率，并给出此时第二个寄存器中的量子态表达式.

(3) 现在将图1中的两个 Hadamard 门替换为旋转门 $e^{-iX\theta/2}$（注意 $H^\dagger$ 应被替换为 $(e^{-iX\theta/2})^\dagger$）. 请重复 (1)(2) 问.

4. 考虑图2中的量子线路.

(1) 若输入态为 $|000\rangle$，计算输出态.

(2) 若输入态为 $|111\rangle$，计算输出态.

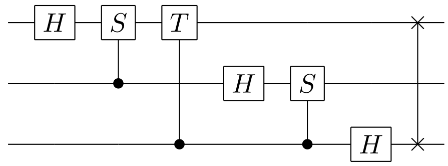

Figure 2:

5.

(1) 写出 CNOT 门分别作用在 $|00\rangle$ 和 $|10\rangle$ 上的结果.

(2) 令 n 为一个正整数，$N = 2^n$. 试设计一个作用在 $(2n)$ 个量子比特上的酉变换 U，使得对于任意的整数 $k : 0 \leq k \leq N-1$，都有

$$U(|k\rangle\,|0\rangle) = |k\rangle\,|k\rangle\,.$$

(这里第二个寄存器中的 $|0\rangle$ 指代长度为 n 的 0 字符串)

(3) 证明第（2）问中所构造的量子线路不违反量子态不可复制定理.

6. 证明量子态不可删除定理：令 $|a\rangle\,,|b\rangle$ 为两个给定的 m 比特量子态，那么不存在一个 $(2n+m)$ 比特的酉变换 U，使得对于任意的 n 比特量子态 $|\psi\rangle$ 都有

$$U(|\psi\rangle\,|\psi\rangle\,|a\rangle) = |\psi\rangle\,|0\rangle\,|b\rangle\,.$$