作业 3

（如无特殊说明，不含下标的范数记号 $\|\cdot\|$ 表示矩阵/向量 2 范数）

1. 考虑矩阵

$$A = N^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}, \quad N = 2^n \geq 4,$$

即 A 的所有非 0 元为 $A_{k,k} = -2N^2, A_{k,k-1} = A_{k,k+1} = N^2$（若指标超出 $[N]$ 的范围，取其模 N 的值）. 记 $\mathcal{F}$ 为 QFT 对应的酉变换.

(1) 试证明 A 可以被 $\mathcal{F}^\dagger$ 酉对角化，并求 A 的所有特征值

(2) 试设计一个实现 e^{-iA} 的量子算法（提示：部分线路可参考实现稀疏矩阵或对角矩阵 block-encoding 的中间步骤）.

2. 在 QPE 中，我们假设了输入的量子态是目标特征值对应的完美的特征向量. 本题将尝试放松这一假设，并探索如何利用 QPE 寻找特征向量.

具体来说，令 U 为一个 N 维酉矩阵，其所有的特征值记为 $e^{i2\pi\phi_j}, j \in [N]$，对应的特征向量记为 $|\psi_j\rangle$. 为了方便起见，我们假设所有的 ϕ_j 互不相等，并且它们都可以用 d 位二进制小数精确表示.

(1) 若 QPE 中的输入量子态（不包含用来存储相位的 d 个量子比特的部分）为 $\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{j=0}^{M-1}|\psi_j\rangle$，其中 M 是一个不大于 N 的正整数，请说明该情况下 QPE 的输出结果（即测量 d 个用来存储相位的量子比特后，这 d 个量子比特会以何种概率如何改变）.

(2) 若 QPE 中的输入量子态（不包含用来存储相位的 d 个量子比特的部分）记为 $|\psi\rangle$，且满足 $|\langle\psi|\psi_0\rangle| = c$，其中 $c \in (0,1]$ 是一个给定的参数. 试证明该 QPE 可以计算 ϕ_0 的值且制备出对应的特征向量 $|\psi_0\rangle$，并计算其成功概率.

(3) 在第 (2) 问的基础上，假设我们事先知道 ϕ_0 和 c 的取值，请结合振幅放大设计一个具有常数成功概率的制备 $|\psi_0\rangle$ 的量子算法，并分析其关于 U 的访问复杂度.

(4) 在第 (2) 问的基础上，如果 ϕ_j 不具有精确的二进制小数表示，请说明如何利用 QPE 给出 ϕ_0 的一个误差不超过 ϵ 的估计，并计算其成功概率、所需量子比特的数量和关于 U 的访问复杂度.

3. 在本题中，我们将尝试构造一个计算矩阵多项式的量子算法. 设 $f(x)$ 为定义在 $x \in [0,1]$ 上的一个多项式，满足 $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [0,1]$. A 为一个半正定厄米矩阵，满足 $\|A\| < 1$，且 A 的所有特征值可用 d 位二进制小数精确表示.

假设我们已知一个实现 $V = e^{i2\pi A}$ 的量子线路，并令 $\mathcal{U}$ 表示Fig. 1中的量子线路所对应的酉矩阵，其中第一个寄存器包含 1 个量子比特，第二个寄存器包含 d 个量子比特，H 表示 Hadamard 门，U_{QFT} 为 d 个量子比特的 QFT 线路，U_ψ 为一个已知量子态 $|\psi\rangle$ 的态制备 oracle（即 $U_\psi|0^n\rangle = |\psi\rangle$），

$$\mathcal{V} = \sum_{j\in[2^d]} |j\rangle\langle j| \otimes V^j,$$

$$U_{\mathrm{CR}} : |0\rangle|j\rangle \mapsto \left(f(j/2^d)|0\rangle + \sqrt{1-|f(j/2^d)|^2}|1\rangle\right)|j\rangle, \quad j \in [2^d].$$

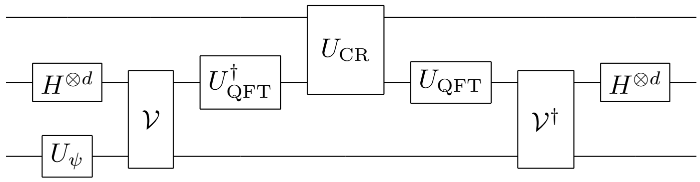

Figure 1:

(1) 若 $|\psi\rangle$ 为 A 的一个特征向量，对应的特征值是 λ. 请计算 $\mathcal{U}$ 作用在 $|0\rangle|0^d\rangle|0^n\rangle$ 上后输出的量子态.

(2) 现在我们考虑一个一般的量子态 $|\psi\rangle$，不再假设它是一个特征向量. 请计算 $\mathcal{U}$ 作用在 $|0\rangle|0^d\rangle|0^n\rangle$ 上后输出的量子态.（提示：考虑将 $|\psi\rangle$ 写成 A 的特征向量的线性组合，并参考问题 2 中的类似计算）

(3) 在第 (2) 问的基础上，如果我们在线路的最后测量第一个量子比特，试计算它变为 $|0\rangle$ 的概率，并说明此时第三个寄存器中的量子态会变成什么.

(4) 在第 (2) 问的基础上，假设我们事先知道 $\|f(A)|\psi\rangle\|$ 的取值（并假设它严格大于 0），请结合振幅放大设计一个量子算法，以常数成功概率制备量子态 $f(A)|\psi\rangle/\|f(A)|\psi\rangle\|$，并分析该算法关于 V 的访问复杂度.

4. 本题将考虑有多个目标的量子无结构搜索问题. 考虑函数 $f(x):[N]\mapsto\{0,1\}$，满足存在一个集合 $E=\{x_0,\cdots,x_{M-1}\}\subset[2^n]$ 使得

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\notin E,\end{cases}$$

其中 M 是一个小于 N 的正整数，并且我们事先已知 N 和 M 的值. 记均匀叠加态为 $|\psi_0\rangle=H^{\otimes n}|0^n\rangle=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x\in[N]}|x\rangle$，$R_{\psi_0}=2|\psi_0\rangle\langle\psi_0|-I$，$f(x)$ 的量子 oracle 为

$$U_f\ \ |x\rangle|y\rangle\mapsto|x\rangle|y\oplus f(x)\rangle,\quad x\in[N],y\in\{0,1\}.$$

(1) 说明 U_f 等价于一个对称变换 R_E：

$$R_E|x\rangle=\begin{cases}|x\rangle, & x\in[N],x\notin E,\\ -|x\rangle, & x\in E.\end{cases}$$

(2) 记 $|y\rangle=\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{x\in E}|x\rangle,|y^\perp\rangle=\frac{1}{\sqrt{N-M}}\sum_{x\in[N],x\notin E}|x\rangle$. 试证明 $|y\rangle$ 和 $|y^\perp\rangle$ 正交，并且 $V=\mathrm{span}\{|y\rangle,|y^\perp\rangle\}$ 是 R_E 和 R_{ψ_0} 的不变子空间.

(3) 给出 R_E 和 R_{ψ_0} 在 V 内的矩阵表示.

(4) 请设计一个量子算法并验证其满足如下的条件：该算法以常数的概率给出一个 $x\in E$，并且关于 U_f（或其等价表示 R_E）的访问复杂度为 $\mathcal{O}(\sqrt{N/M})$.