作业 5

（如无特殊说明，不含下标的范数记号 $\|\cdot\|$ 表示矩阵/向量 2 范数）

1. 设 $\mathcal{C}$ 是一个分块矩阵

$$\mathcal{C}=\begin{pmatrix} C_{00} & C_{01} & \cdots & C_{0,p-1} \\ C_{10} & C_{11} & \cdots & C_{1,p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{p-1,0} & C_{p-1,1} & \cdots & C_{p-1,p-1} \end{pmatrix},$$

其中每个 $C_{i,j}$ 都是维数相同的方阵. 请证明：

$$\|\mathcal{C}\| \leq \sqrt{\left(\max_i \sum_{k=0}^{p-1} \|C_{i,k}\|\right)\left(\max_j \sum_{k=0}^{p-1} \|C_{k,j}\|\right)}.$$

2. 设 $A=L+iH$ 是一个 N 维方阵，其中 $L=\frac{A+A^\dagger}{2}$, $H=\frac{A-A^\dagger}{2i}$. 请证明：对于任意的 $t\in\mathbb{R}$，都有

$$\left\|e^{-At}\right\| \leq \left\|e^{-Lt}\right\|.$$

3. 考虑线性 ODE

$$\frac{du}{dt}=Au+b, \quad u(0)=u_0.$$

其中 A 是一个 N 维方阵，满足 $A+A^\dagger \preceq 0$，b 和 u_0 是 N 维单位向量.

(1) 请分别写出如何在量子计算机上利用向前 Euler 和向后 Euler 格式求该 ODE 的历史解

$$[u(0); u(T/M); u(2T/M); \cdots; u(T)],$$

其中 M 是时间离散步数（只需写出两个算法的关键步骤，无需具体的线路构造或复杂度分析）.

(2) 假设 $A\equiv a<0$ 是一个实数（即维数 $N=1$），且进一步假设 $a<0$. 请证明：对于充分大的时间步数 M 和演化时间 T，使用向前 Euler 求历史解对应的线性方程组的条件数为

$$\mathcal{O}\left(\frac{M}{|a|T}\right).$$

(3) 请设计一个基于 LCHS 求该 ODE 最终解 $u(T)$ 的量子算法（只需写出算法的关键步骤，无需具体的线路构造或复杂度分析，提示：考虑 Duhamel 原理和 LCU）.