作业 6

（如无特殊说明，不含下标的范数记号 $\|\cdot\|$ 表示矩阵/向量 2 范数）

1. （QSP，W-convention）我们课上介绍了基于旋转矩阵 $O(x)$ 和 Pauli Z 旋转门的 QSP，这一结论通常被称为 O-convention QSP. 事实上，QSP 还有多个相互等价的版本. 在本题中，我们将证明被称为 W-convention 的 QSP，并分析其与我们课上介绍的 QSP 的联系.

(1) 设 x 是绝对值不大于 1 的实数，Z 为 Pauli Z 矩阵，

$$W(x) = \begin{pmatrix} x & i\sqrt{1-x^2} \\ i\sqrt{1-x^2} & x \end{pmatrix}.$$

对于非负整数 d，实向量 $\Phi^W = (\phi_0^W, \phi_1^W, \cdots, \phi_d^W) \in \mathbb{R}^{d+1}$，记

$$U_{\Phi^W}(x) = e^{i\phi_0^W Z} W(x) e^{i\phi_1^W Z} W(x) e^{i\phi_2^W Z} \cdots W(x) e^{i\phi_d^W Z} = e^{i\phi_0^W Z} \prod_{j=1}^{d} \Big(W(x) e^{i\phi_j^W Z} \Big).$$

试证明：存在 $\Phi^W \in \mathbb{R}^{d+1}$ 使得

$$U_{\Phi^W}(x) = \begin{pmatrix} P(x) & iQ(x)\sqrt{1-x^2} \\ iQ^*(x)\sqrt{1-x^2} & P^*(x) \end{pmatrix}$$

的充分必要条件是 $P(x), Q(x)$ 是两个复系数多项式，且满足

(a) $\deg(P) \le d$，$\deg(Q) \le d-1$，

(b) P 具有 $d \bmod 2$ parity，Q 具有 $(d-1) \bmod 2$ parity，

(c) $|P(x)|^2 + (1-x^2)|Q(x)|^2 = 1, \forall x \in [-1,1]$.

（注：不允许直接引用课上介绍的 O-convention QSP 结论来证明本小问）

(2) 请说明如何基于第（1）问中的 W-convention QSP 结论来构造 $P(A)$ 的 block-encoding，其中 $P(x)$ 是一个满足第（1）问中所有条件的多项式，A 是一个厄米矩阵，满足 $\|A\| \le 1$.（注：在回答中请详细写出 qubitization 的过程）

(3) 请写出第（1）问 W-convention QSP 中的 Φ^W 与我们课上介绍的 O-convention QSP 中的 Φ 的关系.

2. （酉矩阵对数的量子算法）

(1) 试证明：对于任意的 $\epsilon \in (0, 1/2]$, 存在一个次数为 $d = \mathcal{O}(\log(1/\epsilon))$ 的实系数奇多项式 $p(x)$，满足

$$\sup_{x\in[-1/2,1/2]} \left| p(x) - \frac{2}{\pi}\arcsin(x) \right| \le \epsilon, \qquad \sup_{x\in[-1,1]} |p(x)| \le 1.$$

（提示：考虑 $\arcsin(x)$ 在 $x=0$ 的泰勒展开）

(2) 设 H 是一个未知的厄米矩阵，满足 $\|H\| \le 1/2$，并假设我们已知如何实现酉矩阵 $U = e^{iH}$. 对于任意的 $\epsilon \in (0, 1/2]$，请基于 QSVT 设计一个实现 H 的 (α, a, ϵ)-block-encoding 的量子算法，指出对应的 α 和 a 的值，并分析算法关于 U 的访问复杂度.（提示：考虑先用 LCU 构造 $\sin(H) = (U - U^\dagger)/(2i)$）