# 1.2 变量与函数

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

*andong@bicmr.pku.edu.cn*

25-26 学年第 1 学期

# 函数的定义

设 $x \in X \subseteq \mathbb{R}$, $y \in Y \subseteq \mathbb{R}$，若有一种规则 $f$，使得对于每个 $x \in X$，都能找到唯一确定的 $y \in Y$ 与之对应，则称 $f$ 是一个函数

$$f : X \mapsto Y,$$

并记 $y = f(x)$

- 定义域： $X$
- 到达域： $Y$
- 值域： $f(X) = \{f(x) \in Y \mid x \in X\} \subseteq Y$

# 函数的定义

例子：

1. $y = \sqrt{x-1}$
2. $y = \begin{cases} 4 - 3(100-x)^2/1600, & 60 \le x \le 100, \\ 0, & 0 \le x < 60. \end{cases}$
3. $y = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$
4. $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$

# 初等函数

基本初等函数：

- 常数函数：$f(x)=c$
- 幂函数：$f(x)=x^{\alpha}\ (\alpha\neq 0)$
- 指数函数：$f(x)=a^{x}\ (a>0,a\neq 1)$
- 对数函数：$f(x)=\log_a x\ (a>0,a\neq 1)$，$f(x)=\ln x$
- 三角函数：$\sin x$，$\cos x$，$\tan x$，$\cot x$，$\sec x$，$\csc x$
- 反三角函数：$\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$

# 初等函数

复合函数：两个函数 $f: X \mapsto Y$, $g: Y^* \mapsto Z$，并假设 $f(X) \subseteq Y^*$. 定义复合函数：

$$z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

- 定义依赖于内函数的值域和外函数的定义域有没有交集
- 结果与顺序相关
- 复合函数的值域受最外侧函数影响最大

初等函数：由基本初等函数经过有限次四则运算和复合得到的函数

# 初等函数

例 1: $f(x) = \sin x$, $g(x) = e^x$

例 2: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \ln x$

例 3: $f(x) = \ln(-x)$, $g(x) = e^x$

例 4: $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$

例 5: $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$

# 函数

例 6: 符号函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

例 7: 双曲函数

$$\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

性质:

1. $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$
2. $\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y \pm \mathrm{ch}x\,\mathrm{sh}y$
3. $\mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}y \pm \mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}y$

# 函数

例 8: 取整函数 $f(x)=[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数，$\{x\}=x-[x]$ 为小数函数

性质:

1. $[x]\le x<[x]+1$
2. $\{x\}$ 是以 $1$ 为周期的函数

# 映射

设 $x \in X$, $y \in Y$，若有一种规则 $f$，使得对于每个 $x \in X$，都能找到唯一确定的 $y \in Y$ 与之对应，则称 $f$ 是一个映射

$$f: X \mapsto Y,$$

并记 $y = f(x)$

- 满射：$f(X) = Y$
- 单射：$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$
- 双射：单射 $+$ 满射
- 逆映射（反函数）：对于双射 $y = f(x)$,

$$f^{-1}: Y \mapsto X, \quad x = f^{-1}(y)$$

# 映射

例：$f(x) = \sin x$

1. $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
2. $\mathbb{R} \mapsto [-1, 1]$
3. $[-\pi/2, \pi/2] \mapsto [-1, 1]$

# 有界函数

有上界：存在一个实数 $M$，使得

$$f(x) \leq M, \quad \forall x \in X$$

有下界：存在一个实数 $N$，使得

$$f(x) \geq N, \quad \forall x \in X$$

有界函数：既有上界又有下界，即

$$N \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in X$$

# 有界函数

性质：

1. $f : X \mapsto Y$ 为有界函数的充要条件是，存在一个常数 $C$，使得
$$|f(x)| \leq C, \quad \forall x \in X.$$
2. 设 $f : X \mapsto Y, g : X \mapsto Y$ 是两个有界函数，则 $f \pm g$ 和 $f \cdot g$ 也是有界函数

# 函数的其他性质

单调性、奇偶性、周期性

# 作业

**习题** 1.2： 2(2), 7, 8(3), 10(2), 14, 16