

1.2 变量与函数

安冬

北京大学北京国际数学研究中心 (BICMR)

andong@bicmr.pku.edu.cn

26-27 学年第 1 学期

常量与变量

常量：保持固定值的量

变量：可以取不同值的量

函数：变量之间的对应关系

函数

例子:

1. $y = \sqrt{x-1}$

2. $y = \begin{cases} 4 - 3(100 - x)^2/1600, & 60 \leq x \leq 100, \\ 0, & 0 \leq x < 60. \end{cases}$

3. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

函数的定义

设 $x \in X \subseteq \mathbb{R}$, $y \in Y \subseteq \mathbb{R}$, 若有一种规则 f , 使得对于每个 $x \in X$, 都能找到唯一确定的 $y \in Y$ 与之对应, 则称 f 是一个函数

$$f: X \mapsto Y,$$

并记 $y = f(x)$

- ▶ 定义域: X
- ▶ 到达域: Y
- ▶ 值域: $f(X) = \{f(x) \in Y \mid x \in X\} \subseteq Y$
- ▶ 图形: 平面直角坐标系中满足 $y = f(x)$ 的点 (x, y) 的轨迹

函数

例 4: 绝对值函数 $f(x) = |x|$

函数

例 5: 取整函数 $f(x) = [x]$ 表示不超过 x 的最大整数, $\{x\} = x - [x]$ 为小数函数

性质:

1. $[x] \leq x < [x] + 1$
2. $\{x\}$ 是以 1 为周期的函数

函数

例 6: 符号函数

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

函数

例 7: 狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

奇函数和偶函数

设 $f(x)$ 定义在对称区间 I 上

- ▶ 偶函数: $f(-x) = f(x)$
- ▶ 奇函数: $f(-x) = -f(x)$

例子: x^k , $\cos x$, $\sin x$

性质:

1. 奇函数的图像关于原点对称, 偶函数的图像关于 y 轴对称
2. 奇 + 奇 = 奇, 偶 + 偶 = 偶
3. 偶 $\times$ 偶 = 偶, 奇 $\times$ 奇 = 偶, 奇 $\times$ 偶 = 奇

周期函数

周期函数：存在 $T \neq 0$ ，使得

$$f(x + T) = f(x), \quad \forall x, x + T \in X$$

- ▶ T 称为一个周期
- ▶ 若 T 为周期，则 kT 都是周期 ($k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$)
- ▶ 最小正周期：周期中最小的正数

例： $\sin x$, $|\sin x|$, $D(x)$

有界函数

有上界：存在一个实数 M ，使得

$$f(x) \leq M, \quad \forall x \in X$$

有下界：存在一个实数 N ，使得

$$f(x) \geq N, \quad \forall x \in X$$

有界函数：既有上界又有下界，即

$$N \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in X$$

例子： $\sin x + \cos x$, e^x , $-e^x$

有界函数

性质:

1. $f: X \mapsto Y$ 为有界函数的充要条件是, 存在一个常数 C , 使得

$$|f(x)| \leq C, \quad \forall x \in X.$$

2. 若 f, g 都有界, 则 $f \pm g$ 和 $f \cdot g$ 也有界

作业

习题 1.2: $1(2)(5)$, $9(9)$, $10(2)(5)$, 20