1.3 序列极限

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

序列极限的定义

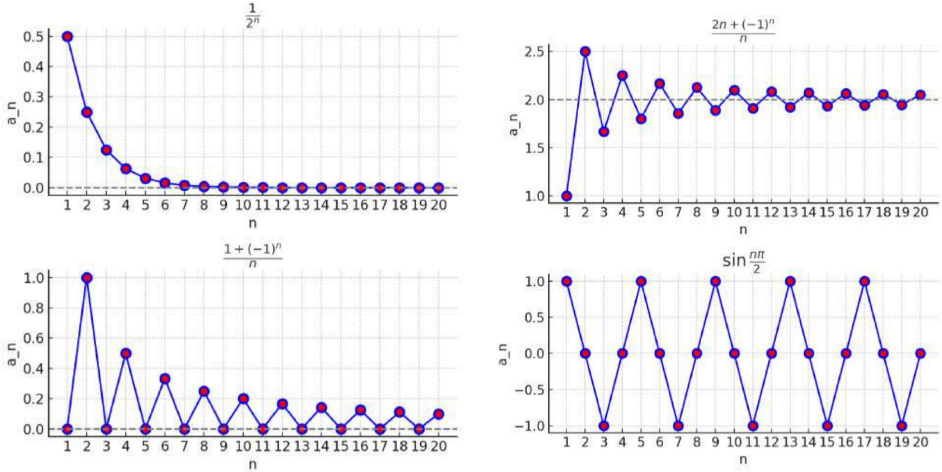
例 1： $a_n = \frac{1}{2^n}$

例 2： $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$

例 3： $a_n = \frac{2n+(-1)^n}{n}$

例 4： $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$

序列极限的定义



序列极限的定义

直观：若 $\{a_n\}$ 在 n 趋于无穷大的过程中有一个确定的趋势，也就是说，a_n 可以任意接近于某个常数 l，则称 l 为 $\{a_n\}$ 的极限

定义：设 $\{a_n\}$ 是一个序列，若存在一个常数 l，对于任意给定的 $\epsilon > 0$，无论它多么小，都存在一个正整数 N，使得

$$|a_n - l| < \epsilon, \quad \text{只要 } n > N,$$

则我们称 a_n 以 l 为极限，记做

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l,$$

或

$$a_n \to l \quad (n \to \infty).$$

序列极限的定义

对于任意的 $\epsilon > 0$，存在正整数 N 使得

$$|a_n - l| < \epsilon \quad \text{只要 } n > N.$$

- N 一般来说依赖于 ϵ
- 若极限存在，则极限唯一：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l_1, \lim_{n\to\infty} a_n = l_2 \quad \Longrightarrow \quad l_1 = l_2$$

- 序列的前有限多项不影响极限：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+m}$$

序列极限的定义

例 1： 给定 $\alpha > 0$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 0.$$

序列极限的定义

例 2: 给定 $a > 0$, 我们有

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

序列极限的定义

例 3: 给定 q 满足 $|q| < 1$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

序列极限的定义

例 4: **设** $a_n \geq 0$, **且** $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, **那么**

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$

序列极限的定义

用 ϵ-N 语言的思路：

1. 猜出极限的值 l
2. 考虑不等式
$$|a_n - l| < \epsilon,$$
其中 $\epsilon > 0$ 可以按需取得足够小
3. 通过求不等式的技巧，得到一个使得 $|a_n - l| < \epsilon$ 成立的充分条件，形如
$$n > \text{关于}\,\epsilon\,\text{的表达式}$$
4. 可取 $N = [\text{关于}\,\epsilon\,\text{的表达式}] + 1$ 完成证明

夹逼定理

定理（夹逼定理/三明治定理）：设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 为三个序列，若

1. 存在正整数 N_0 使得
$$c_n \le a_n \le b_n, \quad \forall\, n \ge N_0,$$
2. $\{c_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都存在极限，且都等于 l,

那么 $\{a_n\}$ 的极限也存在，且也等于 l.

夹逼定理

例 1：给定 $a > 1$，考察序列

$$a_n = \frac{a^n}{n!}$$

是否有极限.

夹逼定理

例 2：给定 $a > 1$，考察序列

$$a_n = \frac{n}{a^n}$$

是否有极限.

夹逼定理

推论：设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 为两个序列，若

1. 存在正整数 N_0 使得
$$0 \le a_n \le b_n, \quad \forall\, n \ge N_0,$$
2. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$,

那么 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

极限的四则运算

设序列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都有极限，且记 $a_n \to l_1$，$b_n \to l_2$，那么

1. $$\lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = l_1 \pm l_2, \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = l_1 l_2$$
2. 对于一个常数 c，我们有
$$\lim_{n\to\infty} c a_n = c l_1$$
3. 若 $l_2 \neq 0$，则
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l_1}{l_2}$$

极限的四则运算

例 1：求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+5n+1}{4n^3+8}$$

例 2：求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$$

反例：

$$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$

极限的性质

定理（保序性）：设 $a_n \to l_1$，$b_n \to l_2$，则有以下两个结论：

1. 若 $l_1 > l_2$，则存在一个正整数 N，使得 $\forall\, n > N$，都有 $a_n > b_n$.
2. 若存在一个正整数 N，使得 $\forall\, n > N$，都有 $a_n \geq b_n$，则 $l_1 \geq l_2$.

推论：设 $a_n \to l$，以及 c 是一个常数，则有以下两个结论：

1. 若 $l > c$，则存在一个正整数 N，使得 $\forall\, n > N$，都有 $a_n > c$.
2. 若存在一个正整数 N，使得 $\forall\, n > N$，都有 $a_n \geq c$，则 $l \geq c$.

极限的性质

子序列：设 $\{a_n\}$ 是一个序列，$\{n_k\}$ 是一个单调递增的正整数列，则称 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的一个子序列.

定理：若 $a_n \to l$，则它的任意一个子序列 $a_{n_k} \to l$.

推论：若 $\{a_n\}$ 中存在着两个极限不同的子序列，则 $\{a_n\}$ 的极限不存在.

极限的性质

定理：若 $a_n \to l$，则 $|a_n| \to |l|$.

定理：若 $a_n \to l$，则 $\{a_n\}$ 有界.

定理：若 $a_n \to 0$，且 $\{b_n\}$ 有界，则 $a_n b_n \to 0$.

一个重要极限

自然对数的底：

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

一个重要极限

例 1: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$

例 2: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+1}$

例 3: $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$

作业

习题 1.3: 3, 4(4), 5, 7(1)(3), 10