

1.3 反函数 · 复合函数 · 初等函数

安冬

北京大学北京国际数学研究中心 (BICMR)

andong@bicmr.pku.edu.cn

26-27 学年第 1 学期

单调函数

递增函数：

$$f(x_1) \leq f(x_2), \quad \forall x_1 < x_2$$

递减函数：

$$f(x_1) \geq f(x_2), \quad \forall x_1 < x_2$$

严格递增（严格递减）：定义中的不等号 $\leq$ ($\geq$) 改为严格不等号 $<$ ($>$)

（严格）单调函数：（严格）递增函数或（严格）递减函数

例： x , x^2 , $[x]$

反函数

定义：对于函数 $y = f(x)$ ，定义域为 X ，值域为 Y 。如果对于任意的 $y \in Y$ ，都有且仅有一个 $x \in X$ 使得 $y = f(x)$ ，则对应规则 $y \mapsto x$ 被称为 f 的反函数，记为

$$x = f^{-1}(y)$$

- ▶ 例： $y = 2x + 3$, $y = x^2$
- ▶ 不是每个函数都有反函数
- ▶ 严格单调函数必有反函数
- ▶ 原函数与反函数的图像关于 $y = x$ 对称

复合函数

两个函数 $u = \varphi(x)$, $X \mapsto U'$; $y = f(u)$, $U \mapsto Y$, 并假设 $U' \subseteq U$

复合函数: $y = f(\varphi(x))$, $X \mapsto Y$

- ▶ 其他记号: $y = f[\varphi(x)]$, $y = (f \circ \varphi)(x)$
- ▶ 复合函数的定义, 依赖于内函数的值域和外函数的定义域的交集
- ▶ 结果与顺序相关
- ▶ 复合函数的值域受最外侧函数影响最大

例: $\sin(e^x)$, $\ln(\sqrt{x})$, $\sqrt{1-x^2}$, $|x|$

初等函数

基本初等函数：

- ▶ 常数函数： $f(x) = c$
- ▶ 幂函数： $f(x) = x^\alpha$ ($\alpha \neq 0$)
- ▶ 指数函数： $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)
- ▶ 对数函数： $f(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$), $f(x) = \ln x$
- ▶ 三角函数： $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$
- ▶ 反三角函数： $\arcsin x, \arccos x, \arctan x$

初等函数

初等函数：由基本初等函数经过有限次四则运算和复合得到的函数

例： $\sin(e^x)$, $\ln(\sqrt{x})$, $\sqrt{1-x^2}$, $|x|$

作业

习题 1.3: $3(3)(5)$, 5