1.4 函数的极限

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

函数的极限

序列极限：$a_n \to l \quad (n \to \infty)$

序列极限是函数极限的一种特殊情况：

1. 自变量的变化方式：离散 vs 连续
2. 自变量的趋势：无穷 vs 多种
    - a 是某个固定的实数，考虑函数 $f(x)$
        - x 从 a 的右侧趋向于点 a：$x \to a + 0$
        - x 从 a 的左侧趋向于点 a：$x \to a - 0$
        - x 趋向于 a，不限制方向：$x \to a$
    - 趋于无穷大的情况
        - x 无限制增大：$x \to +\infty$
        - x 无限制减小：$x \to -\infty$
        - x 无限制远离原点，不限制方向：$x \to \infty$ （其实就是 $|x| \to +\infty$）

单侧极限

例 1： $f(x) = \sin x$，考虑 $\pi/2$ 附近

例 2： $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$，考虑 0 附近

例 3： $f(x) = \sin(1/x)$，考虑 0 附近

例 4： $f(x) = x\sin(1/x)$，考虑 0 附近

单侧极限

直观：只要 x 从某一侧充分接近于 a，$f(x)$ 可以任意接近某个数 l

定义（右极限）：$f(x)$ 是定义在 (a, b) 上的函数. 若存在一个常数 l，对于任意的 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得

$$|f(x) - l| < \epsilon, \quad \text{只要}\, 0 < x - a < \delta,$$

则称当 $x \to a + 0$ 时，$f(x)$ 以 l 为右极限，记作

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = l,$$

或

$$f(x) \to l \quad (x \to a + 0).$$

单侧极限

定义（左极限）：$f(x)$ 是定义在 (b, a) 上的函数. 若存在一个常数 l，对于任意的 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得

$$|f(x) - l| < \epsilon, \quad \text{只要} 0 < a - x < \delta,$$

则称当 $x \to a - 0$ 时，$f(x)$ 以 l 为左极限，记作

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = l,$$

或

$$f(x) \to l \quad (x \to a - 0).$$

单侧极限

序列：

- 只要 n 充分大，a_n 可以任意接近某个数 l
- $\{a_n\}$，对于任意 $\epsilon > 0$，都存在 $N > 0$，使得只要 $n > N$，就有 $|a_n - l| < \epsilon$.

函数：

- 只要 x 从某一侧充分接近于 a，$f(x)$ 可以任意接近某个数 l
- $f(x)$ 定义在 (a, b) 上，对于任意 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得只要 $0 < x - a < \delta$，就有 $|f(x) - l| < \epsilon$.
  - 不用关心较大的 b
  - $f(a)$ 的值与极限无关（$f(x)$ 甚至不需要在 a 点有定义）
  - 左极限和右极限没有必然联系

双侧极限

定义：$f(x)$ 是定义在 $U_r(a)\backslash\{a\}$ 上的函数. 若存在一个常数 l，对于任意的 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得

$$|f(x) - l| < \epsilon, \quad \text{只要}\, 0 < |x - a| < \delta,$$

则称当 $x \to a$ 时，$f(x)$ 以 l 为极限，记作

$$\lim_{x \to a} f(x) = l,$$

或

$$f(x) \to l \quad (x \to a).$$

- 极限存在 $\Longleftrightarrow$ 左右极限都存在，且相等
- 极限不存在：单侧极限至少有一个不存在，或两个都存在但不相等

双侧极限

例 1:

$$\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$$

双侧极限

例 2:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \frac{3}{4}$$

关于函数极限的定理

定理（夹逼定理）：设 $f(x), g(x), h(x)$ 定义在点 a 的一个空心邻域内，且

$$g(x) \le f(x) \le h(x).$$

如果 $\lim_{x\to a} g(x) = l$ 且 $\lim_{x\to a} h(x) = l$，那么 $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

关于函数极限的定理

例：证明

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

关于函数极限的定理

定理（四则运算）：设 $f(x), g(x)$ 定义在点 a 的一个空心邻域内. 若

$$\lim_{x\to a} f(x) = l_1, \quad \lim_{x\to a} g(x) = l_2,$$

则有

1. $$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = l_1 \pm l_2, \quad \lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = l_1 l_2,$$
2. 对于常数 c，我们有
$$\lim_{x\to a}(cf(x)) = cl_1,$$
3. 当 $l_2 \neq 0$ 时，我们有
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$$

关于函数极限的定理

例：求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)-\tan(3x)}{2x}$$

关于函数极限的定理

定理（保序性）：设 $f(x), g(x)$ 定义在点 a 的一个空心邻域内，且

$$\lim_{x \to a} f(x) = l_1, \quad \lim_{x \to a} g(x) = l_2.$$

1. 若 $l_1 > l_2$，则存在 $\delta > 0$，使得

$$f(x) > g(x), \quad \forall\, 0 < |x - a| < \delta.$$

2. 若 $f(x) \geq g(x)$，则 $l_1 \geq l_2$.

关于函数极限的定理

定理（函数极限与序列极限的关系）：设 $f(x)$ 定义在点 a 的一个空心邻域 $U_r(a)\backslash\{a\}$，则下面两个条件互为充分必要条件：

1. $\lim_{x\to a} f(x) = l$.
2. 对于在 $U_r(a)\backslash\{a\}$ 内的任一序列 $\{x_n\}$，若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

应用：证明函数极限不存在

- 找一个序列 $\{x_n\}$，使得 $x_n \to a$，但 $f(x_n)$ 的极限不存在
- 找两个序列 $\{x_n'\}$ 和 $\{x_n''\}$，使得 $x_n', x_n'' \to a$，$\lim_{n\to\infty} f(x_n')$ 和 $\lim_{n\to\infty} f(x_n'')$ 都存在，但不相等

关于函数极限的定理

例：讨论 $\lim_{x\to a} f(x) = xD(x)$ 的存在性，其中 $D(x)$ 是狄利克雷函数.

自变量趋于无穷大时函数的极限

三种情况：

1. $x \to \infty$： 任意 $\epsilon > 0$，存在实数 A，使得对于任意 $x > A$，都有 $|f(x) - l| < \epsilon$.
2. $x \to -\infty$： 任意 $\epsilon > 0$，存在实数 A，使得对于任意 $x < A$，都有 $|f(x) - l| < \epsilon$.
3. $x \to \infty$： 任意 $\epsilon > 0$，存在实数 A，使得对于任意 $|x| > A$，都有 $|f(x) - l| < \epsilon$.

- $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 都存在且相等
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{y\to 0} f(1/y)$
- 关于极限的定理也都成立

自变量趋于无穷大时函数的极限

例 1： 求极限

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + x^2 + 1}{(x+1)^4}$$

自变量趋于无穷大时函数的极限

例 2：证明

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

无穷大量

定义：设 $f(x)$ 定义在 a 的一个空心领域内．任意 $M>0$，不管它多么大，都存在 $\delta>0$，使得对于任意 $0<|x-a|<\delta$，都有

$$|f(x)|>M.$$

那么称当 $x\to a$ 时，$f(x)$ 为无穷大量，记为

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

- 可类似定义正无穷大、负无穷大，以及自变量 x 趋于（正/负）无穷大的情况
- 此时极限不存在
- 极限的定理通常不成立

无穷大量

例 1： $f(x) = e^x$， 考虑 $x \to +\infty, -\infty, \infty$ 的情形

例 2： $f(x) = \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$， 考虑 $x \to 0$

作业

习题 1.4: 1(2), 3(2)(9)(12)(13)(16), 4(2)(7)