

1.4-1.5 极限的概念和运算法则

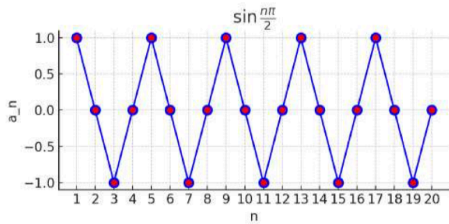
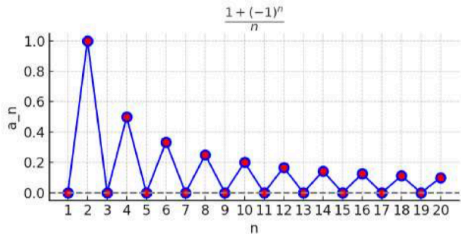
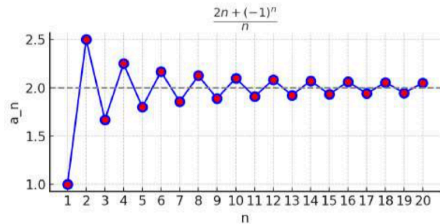
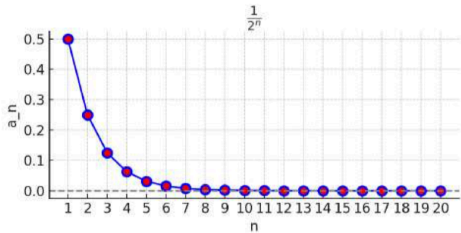
安冬

北京大学北京国际数学研究中心 (BICMR)

andong@bicmr.pku.edu.cn

26-27 学年第 1 学期

序列极限的定义



序列极限的定义

直观：若 $\{x_n\}$ 在 n 趋于无穷大的过程中有一个确定的趋势，也就是说， x_n 可以任意接近于某个常数 a ，则称 a 为 $\{x_n\}$ 的极限

定义：设 $\{x_n\}$ 是一个序列，若存在一个常数 a ，对于任意给定的 $\epsilon > 0$ ，无论它多么小，都存在一个正整数 N ，使得当 $n > N$ 时，就有

$$|x_n - a| < \epsilon.$$

则我们称 x_n 以 a 为极限，记做

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

或

$$x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty).$$

序列极限的定义

对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N 使得

$$|x_n - a| < \epsilon \quad \text{只要 } n > N.$$

- ▶ N 一般来说依赖于 ϵ
- ▶ 若极限存在, 则极限唯一:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \quad \implies \quad a = b$$

- ▶ 序列的前面有限多项不影响极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+m}$$

序列极限的定义

例 1: 给定 $\alpha > 0$, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

序列极限的定义

例 2: 给定 q 满足 $|q| < 1$, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

序列极限的定义

例 3: 给定 $a > 0$, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

序列极限的定义

用 ϵ - N 语言的思路:

1. 猜出极限的值 a
2. 考虑不等式

$$|x_n - a| < \epsilon,$$

其中 $\epsilon > 0$ 可以按需取得足够小

3. 通过求不等式的技巧, 得到一个使得 $|x_n - a| < \epsilon$ 成立的充分条件, 形如

$$n > \text{关于 } \epsilon \text{ 的表达式}$$

4. 可取 $N = [\text{关于 } \epsilon \text{ 的表达式}] + 1$ 完成证明

夹逼定理

定理（夹逼定理/三明治定理）：设 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 为三个序列，若

1. 存在正整数 N_0 使得

$$z_n \leq x_n \leq y_n, \quad \forall n \geq N_0,$$

2. $\{z_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都存在极限，且都等于 a ,

那么 $\{x_n\}$ 的极限也存在，且也等于 a .

夹逼定理

例 4: 给定 $a > 1$, 考察序列

$$x_n = \frac{a^n}{n!}, \quad y_n = \frac{n}{a^n}$$

是否有极限.

夹逼定理

推论：设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 为两个序列，若

1. 存在正整数 N_0 使得

$$0 \leq x_n \leq y_n, \quad \forall n \geq N_0,$$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$,

那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

极限的四则运算

设序列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都有极限, 且记 $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b$, 那么

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm y_n = a \pm b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = ab$$

2. 对于一个常数 c , 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} cx_n = ca$$

3. 若 $b \neq 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$

极限的四则运算

例 5：求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 5n + 1}{4n^3 + 8}$$

例 6：求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} \right)$$

极限的性质：保序性

定理（保序性）：设 $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow b$, 则有以下两个结论：

1. 若 $a > b$, 则存在一个正整数 N , 使得 $\forall n > N$, 都有 $x_n > y_n$.
2. 若存在一个正整数 N , 使得 $\forall n > N$, 都有 $x_n \geq y_n$, 则 $a \geq b$.

推论：设 $x_n \rightarrow a$, 以及 c 是一个常数, 则有以下两个结论：

1. 若 $a > c$, 则存在一个正整数 N , 使得 $\forall n > N$, 都有 $x_n > c$.
2. 若存在一个正整数 N , 使得 $\forall n > N$, 都有 $x_n \geq c$, 则 $a \geq c$.

极限的性质：子序列

子序列：设 $\{x_n\}$ 是一个序列， $\{n_k\}$ 是一个严格单调递增的正整数列，则称 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的一个子序列.

定理：若 $x_n \rightarrow l$ ，则它的任意一个子序列 $x_{n_k} \rightarrow l$.

推论：若 $\{x_n\}$ 中存在着两个极限不同的子序列，则 $\{x_n\}$ 的极限不存在.

例 7：证明 $x_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ 无极限

极限的性质：与有界的关系

定理：若 $x_n \rightarrow a$ ，则 $\{x_n\}$ 有界.

定理：若 $x_n \rightarrow 0$ ，且 $\{y_n\}$ 有界，则 $x_n y_n \rightarrow 0$.

例 8：求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$$

定理：单调有界序列必有极限

一个重要极限

自然对数的底:

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

一个重要极限

例 9: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$

例 10: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+1}$

例 11: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

函数极限

函数的极限

序列极限: $x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$

序列极限是函数极限的一种特殊情况:

1. 自变量的变化方式: 离散 vs 连续

2. 自变量的趋势: 一种 vs 多种

- ▶ x_0 是某个固定的实数, 考虑函数 $f(x)$

- ▶ x 从 x_0 的右侧趋向于点 x_0 : $x \rightarrow x_0 + 0$

- ▶ x 从 x_0 的左侧趋向于点 x_0 : $x \rightarrow x_0 - 0$

- ▶ x 趋向于 x_0 , 不限制方向: $x \rightarrow x_0$

- ▶ 趋于无穷大的情况

- ▶ x 无限制增大: $x \rightarrow +\infty$

- ▶ x 无限制减小: $x \rightarrow -\infty$

- ▶ x 无限制远离原点, 不限制方向: $x \rightarrow \infty$ (其实就是 $|x| \rightarrow +\infty$)

单侧极限

例 11: $f(x) = \sin x$, 考虑 $\pi/2$ 附近

例 12: $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, 考虑 0 附近

例 13: $f(x) = \sin(1/x)$, 考虑 0 附近

例 14: $f(x) = x\sin(1/x)$, 考虑 0 附近

单侧极限

直观：只要 x 从某一侧充分接近于 x_0 ， $f(x)$ 可以任意接近某个数 A

定义（右极限）： $f(x)$ 是定义在 x_0 右侧的函数. 若存在一个常数 A ，对于任意的 $\epsilon > 0$ ，都存在 $\delta > 0$ ，使得当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时，便有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \rightarrow x_0 + 0$ 时， $f(x)$ 以 A 为右极限，记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A,$$

或

$$f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0 + 0).$$

单侧极限

定义 (左极限): $f(x)$ 是定义在 x_0 左侧的函数. 若存在一个常数 A , 对于任意的 $\epsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, 便有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \rightarrow x_0 - 0$ 时, $f(x)$ 以 A 为左极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A,$$

或

$$f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0 - 0).$$

单侧极限

序列:

- ▶ 只要 n 充分大, x_n 可以任意接近某个数 a
- ▶ $\{x_n\}$, 对于任意 $\epsilon > 0$, 都存在 $N > 0$, 使得只要 $n > N$, 就有 $|x_n - a| < \epsilon$.

函数:

- ▶ 只要 x 从某一侧充分接近于 x_0 , $f(x)$ 可以任意接近某个数 A
- ▶ $f(x)$, 对于任意 $\epsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得只要 $0 < x - x_0 < \delta$, 就有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

单侧极限

例 15: 求 $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

双侧极限

定义: $f(x)$ 是定义在 $U_r(a) \setminus \{a\}$ 上的函数. 若存在一个常数 l , 对于任意的 $\epsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x) - l| < \epsilon, \quad \text{只要 } 0 < |x - a| < \delta,$$

则称当 $x \rightarrow a$ 时, $f(x)$ 以 l 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l,$$

或

$$f(x) \rightarrow l \quad (x \rightarrow a).$$

- ▶ 极限存在 $\iff$ 左右极限都存在, 且相等
- ▶ 极限不存在: 单侧极限至少有一个不存在, 或两个都存在但不相等

双侧极限

例 16: 设 $a > 0$, 证明:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$$

双侧极限

例 17: 证明:

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

函数极限的定义

用 ϵ - δ 语言的思路:

1. 猜出极限的值 A
2. 考虑不等式

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

其中 $\epsilon > 0$ 可以按需取得足够小

3. 通过求不等式的技巧, 得到一个使得 $|f(x) - A| < \epsilon$ 成立的充分条件, 形如

$$|x - x_0| < \text{关于 } \epsilon \text{ 的表达式}$$

4. 可取 $\delta = \text{关于 } \epsilon \text{ 的表达式}$ 完成证明

函数极限的性质

定理（夹逼定理）：设 $f(x), g(x), h(x)$ 定义在点 x_0 的一个空心邻域内，且

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$ ，那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

函数极限的性质

例 18: 证明

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

函数极限的性质：四则运算

定理（四则运算）：设 $f(x), g(x)$ 定义在点 x_0 的一个空心邻域内. 若

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B,$$

则有

1.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = AB,$$

2. 对于常数 c , 我们有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = cA,$$

3. 当 $B \neq 0$ 时, 我们有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

函数极限的性质：四则运算

例 19：求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

函数极限的性质：保序性

定理（保序性）：设 $f(x), g(x)$ 定义在点 x_0 的一个空心邻域内，且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B.$$

1. 若 $A > B$ ，则存在 $\delta > 0$ ，使得

$$f(x) > g(x), \quad \forall 0 < |x - x_0| < \delta.$$

2. 若 $f(x) \geq g(x)$ ，则 $A \geq B$.

函数极限的性质：与有界的关系

定理：若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，则 $f(x)$ 在 x_0 的某个空心邻域内有界.

定理：当 $x \rightarrow x_0$ 时，若 $f(x) \rightarrow 0$ ，且 $g(x)$ 有界，则 $f(x)g(x) \rightarrow 0$.

函数极限与序列极限的关系

定理（函数极限与序列极限的关系）：设 $f(x)$ 定义在点 x_0 的一个空心邻域 $U_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ ，则下面两个条件互为充分必要条件：

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.
2. 对于在 $U_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ 内的任一序列 $\{x_n\}$ ，若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

应用：证明函数极限不存在

- ▶ 找一个序列 $\{x_n\}$ ，使得 $x_n \rightarrow x_0$ ，但 $f(x_n)$ 的极限不存在
- ▶ 找两个序列 $\{x'_n\}$ 和 $\{x''_n\}$ ，使得 $x'_n, x''_n \rightarrow x_0$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n)$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n)$ 都存在，但不相等

函数极限与序列极限的关系

例 20: 考虑极限

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(\frac{1}{x} \right)$$

自变量趋于无穷大时函数的极限

三种情况：

1. $x \rightarrow +\infty$: 任意 $\epsilon > 0$, 存在实数 X , 使得对于任意 $x > X$, 都有 $|f(x) - A| < \epsilon$.
2. $x \rightarrow -\infty$: 任意 $\epsilon > 0$, 存在实数 X , 使得对于任意 $x < X$, 都有 $|f(x) - A| < \epsilon$.
3. $x \rightarrow \infty$: 任意 $\epsilon > 0$, 存在实数 X , 使得对于任意 $|x| > X$, 都有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

- ▶ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在 $\iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 都存在且相等
- ▶ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(1/y)$
- ▶ 关于极限的定理也都成立

自变量趋于无穷大时函数的极限

例 21: 求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^2 + 1}{(x+1)^4}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$$

自变量趋于无穷大时函数的极限

例 22: 证明

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

无穷小量

无穷小量：极限为 0 的变量

► 例： $1/n, 1/2^n, \sin x, x^2$ ($n \rightarrow \infty, x \rightarrow 0$)

性质：

1. 有限个无穷小量的和是无穷小量
2. 有界变量与无穷小量的乘积是无穷小量
3. 无穷小量除以极限存在且不为 0 的变量，其商是无穷小量

例 23：求 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \sin(\frac{1}{x})$

无穷大量

定义：设 $f(x)$ 定义在 x_0 的一个空心邻域内. 任意 $M > 0$, 不管它多么大, 都存在 $\delta > 0$, 使得对于任意 $0 < |x - x_0| < \delta$, 都有

$$|f(x)| > M.$$

那么称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 为无穷大量, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

- ▶ 可类似定义正无穷大、负无穷大, 以及自变量 x 趋于 (正/负) 无穷大的情况
- ▶ 此时极限不存在
- ▶ 极限的定理通常不成立

无穷大量

例 24: 证明 $\ln n$ 是无穷大量

无穷小量与无穷大量

定理:

1. u 是无穷大量 $\implies 1/u$ 是无穷小量
2. v 是无穷小量且 $v \neq 0 \implies 1/v$ 是无穷大量

例 25: 当 $|q| > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$

作业

习题 1.4: 10 (用定义证), 13, 15, 17, 20

习题 1.5: 3, 5, 13, 20, 28, 30, 31(3)