1.5 连续函数
1.6 闭区间上连续函数的性质

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

连续性的定义

直观：函数的图像是连续曲线

例子：$f(x) = \sin x$

反例：$f(x) = \mathrm{sgn}(x)$

连续性的定义

设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有定义，$x_0 \in (a,b)$. 为了定义 $f(x)$ 在 x_0 处连续，我们有以下两种等价的定义方式：

1. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在且等于 $f(x_0)$.
2. 任意 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得对于任意 $|x - x_0| < \delta$，都有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

- 极限存在 + 当前点的函数值
- 连续性是局部性质
- 四则运算保持连续性（除法需要分母不为 0）

例：$e^x x^n$, $\sqrt{x}$, $[x]$, $D(x)$

连续性的定义

左（右）连续：函数定义在 $[x_0, x_0 + r)$（$(x_0 - r, x_0]$）上，仅考虑左（右）极限

$$\text{连续} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{左连续} + \text{右连续}$$

区间上连续：（此时也称函数是连续函数）

- (a, b) 上连续：对于 (a, b) 中的任一点都连续
- $[a, b]$ 上连续：(a, b) 上连续 + 点 a 处右连续 + 点 b 处左连续
- 类似定义半开半闭区间上的连续函数

例：$\sqrt{x}$, $[x]$，$D(x)$

连续性的定义

定理：若 $f(x)$ 在 (a,b) 上满足：

$$|f(x_1)-f(x_2)| \le L|x_1-x_2|, \quad \forall\, x_1, x_2 \in (a,b),$$

其中 L 是一个正常数，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续（被称为李普希茨连续）

复合函数的连续性

定理：若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，$g(y)$ 在 $f(x_0)$ 处连续，则 $g \circ f$ 在 x_0 处连续

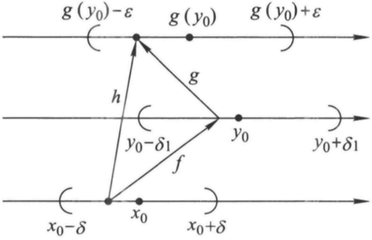

图 1.17

定理：若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$，$g(y)$ 在 y_0 处连续，则 $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$

- 无需在 x_0 处有定义（思考：是否需要 $g(y)$ 在 y_0 处有定义？）
- x_0 可换为 $+\infty, -\infty, \infty$
- 等价形式：$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x))$

复合函数的连续性

例 1： $\lim_{x\to\infty} \cos\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$

例 2： $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

例 3： 若 $f(x)$ 连续，则 $|f(x)|$ 也连续. 反之不成立.

反函数的连续性

定理：设 $f:(a,b)\mapsto(c,d)$ 是双射（于是 $f^{-1}:(c,d)\mapsto(a,b)$ 存在且也是双射），并且假设 $f(x)$ 是严格单调的．那么

1. f^{-1} 在 (c,d) 上有和 f 相同的单调性
2. f 在 (a,b) 上连续
3. f^{-1} 在 (c,d) 上连续

应用：初等函数在其定义域中任意一个区间上都是连续的

反函数的连续性

例： $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\sqrt{x}}$

间断点的分类

间断点 x_0： $f(x)$ 在 x_0 处有定义但不连续

- 第一类间断点： $\lim_{x\to x_0+0} f(x)$ 和 $\lim_{x\to x_0-0} f(x)$ 都存在. 两种情况
  - 左右极限不相等
  - 左右极限相等，但不等于 $f(x_0)$（此时称为可去间断点）
- 第二类间断点： $\lim_{x\to x_0+0} f(x)$ 和 $\lim_{x\to x_0-0} f(x)$ 中至少一个不存在

间断点的分类

例 1： $f(x) = \{x\}$

例 2： $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2)$

例 3： $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

闭区间上连续函数的性质

定理（界值定理）：设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，并且 $f(a) \neq f(b)$，则

1. 对于任意一个严格介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之前的值 η，都存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得 $f(\xi) = \eta$.
2. $f(x)$ 可以取到 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的所有值

推论（零点存在定理）：设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)f(b) < 0$，则存在 $\xi \in (a, b)$，使得 $f(\xi) = 0$.

例：实系数多项式 $p(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$（其中 $a_0 \neq 0$）至少有一个实根

闭区间上连续函数的性质

定理（最值定理）：设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则它有最大值和最小值.

定理（有界性定理）：闭区间上的连续函数是有界函数.

- 开区间的连续函数可能是无界的
- 开区间的连续函数即使有界，也不一定有最大/最小值
- 闭区间上的函数如果不连续，即使它有界，也不一定有最大/最小值

推论：闭区间上的连续函数值域为闭区间

闭区间上连续函数的性质

定理：区间上的连续单射是严格单调的.

推论：区间上的连续函数，若其反函数存在，则反函数也连续.

作业

习题 1.5: 1(1), 5(2)(5), 6, 7(4)(5)

习题 1.6: 2, 5