

1.6 函数的连续性

安冬

北京大学北京国际数学研究中心 (BICMR)

andong@bicmr.pku.edu.cn

26-27 学年第 1 学期

连续性的定义

直观：函数的图像是连续曲线

例子： $f(x) = \sin x$, $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

连续性的定义

定义：设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义. 连续性有以下两种等价的定义方式：

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在且等于 $f(x_0)$.
2. 任意 $\epsilon > 0$ ，都存在 $\delta > 0$ ，使得对于任意 $|x - x_0| < \delta$ ，都有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

- ▶ 极限存在 + 当前点的函数值
- ▶ 连续性是局部性质

连续性的定义

例 1: 研究 $f(x) = |x|$ 的连续性

连续性的定义

左（右）连续：函数定义在 $(x_0 - r, x_0]$ ($[x_0, x_0 + r)$) 上，仅考虑左（右）极限

连续 $\iff$ 左连续 + 右连续

区间上连续：（此时也称函数是连续函数）

- ▶ (a, b) 上连续：对于 (a, b) 中的任一点都连续
- ▶ $[a, b]$ 上连续： (a, b) 上连续 + 点 a 处右连续 + 点 b 处左连续
- ▶ 类似定义半开半闭区间上的连续函数

连续性的定义

例 2: 研究 $f(x) = \sqrt{x}$ 和 $f(x) = [x]$ 的连续性

间断点

间断点 x_0 : $f(x)$ 在 x_0 处有定义但不连续

- ▶ 第一类间断点: $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ 都存在. 两种情况
 - ▶ 左右极限不相等
 - ▶ 左右极限相等, 但不等于 $f(x_0)$ (此时称为可去间断点)
- ▶ 第二类间断点: $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ 中至少一个不存在

间断点

例 3: $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

连续函数的运算

四则运算：连续函数的四则运算是连续函数（除法要求分母不为 0）

连续函数的运算

复合函数：连续函数的复合是连续函数

定理：若 $f(x)$ 在 x_0 处连续， $g(y)$ 在 $f(x_0)$ 处连续，则 $g \circ f$ 在 x_0 处连续

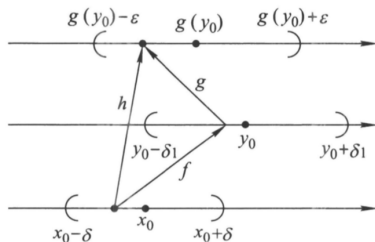


图 1.17

推广：若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ ， $g(y)$ 在 y_0 处连续，则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0)$

连续函数的运算

反函数：严格单调连续函数的反函数是连续函数

定理：设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调递增，并且连续，则

1. 存在反函数 $x = f^{-1}(y)$
2. f^{-1} 在 $[f(a), f(b)]$ 上也严格单调递增
3. f^{-1} 在 $[f(a), f(b)]$ 上连续

初等函数的连续性

定理：基本初等函数在其定义域上是连续的

► 常数函数、幂函数、指数函数、三角函数、对数函数、反三角函数

定理：初等函数在其定义域上是连续的

初等函数的连续性

例 4: 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} \ln(2+x^2)}{(1-x)^2 + \cos x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

闭区间上连续函数的性质

定理（中间值定理）：设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，并且 $f(a) \neq f(b)$ ，则

1. 对于任意一个严格介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的值 η ，都存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得 $f(\xi) = \eta$.
2. $f(x)$ 可以取到 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的所有值

推论（零点存在定理）：设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)f(b) < 0$ ，则存在 $\xi \in (a, b)$ ，使得 $f(\xi) = 0$.

例 5：方程 $x^5 - 3x = 1$ 至少有一个实数解

闭区间上连续函数的性质

定理（最值定理）：设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则它有最大值和最小值.

定理（有界性定理）：闭区间上的连续函数是有界函数.

- ▶ 开区间的连续函数可能是无界的
- ▶ 开区间的连续函数即使有界，也不一定有最大/最小值
- ▶ 闭区间上的函数如果不连续，即使它有界，也不一定有最大/最小值

推论：闭区间上的连续函数值域为闭区间

作业

习题 1.6: 3, 6, 11, 15, 17