2.1-2.2 导数

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

导数的定义

导数的来源：

- 瞬时速度
- 曲线切线的斜率

函数 $y = f(x)$，计算函数增量 Δy 与自变量增量 Δx 之比的极限

导数的定义

定义：函数 $y = f(x)$ 在 $(a.b)$ 上有定义．对于 $x_0 \in (a,b)$，若极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f(x)$ 在 x_0 处可导，并称这个极限值为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数/微商

- 记号：

$$f'(x_0), \quad y'\big|_{x=x_0}, \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}, \quad \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}, \quad \frac{d}{dx}f(x)\Big|_{x=x_0}$$

- x_0 是固定的点，Δx 是充分小的变量（可正可负）
- 等价写法：记 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$，

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- 可类似定义单侧导数 $f'(x_0+0)$ 和 $f'(x_0-0)$
- 区间上可导：区间内每一点都可导，$f'(x)$ 称为导函数（导数）

导数的定义

例 1：考虑 $f(x) = |x|$ 在 0 处的导数

导数的定义

例 2：设 $f(x)$ 在 x_0 处可导且 $f'(x_0) = 1$. 求

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - 2\Delta x)}{\Delta x}$$

导数的定义

一些基本初等函数的导数：

$$(c)' = 0, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$
$$(x^m)' = mx^{m-1}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = a^x \ln a$$

导数的定义

可导和连续的关系：

1. 可导一定连续
2. 连续不一定可导（$\sqrt{x}$, $|x|$, $x\sin(1/x)$）

例：求 a 和 b 的值，使得函数 $f(x) = \begin{cases} ax+b, & x<2 \\ x^2, & x\geq 2 \end{cases}$ 处处可导

导数的四则运算

$$
\begin{aligned}
(f(x) \pm g(x))' &= f'(x) \pm g'(x) \\
(f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
(cf(x))' &= cf'(x) \\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}
\end{aligned}
$$

例： $(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$，$(x^{-m})' = -mx^{-m-1}$

复合函数的导数

定理：若函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可导，函数 $z = g(y)$ 在 $f(x_0)$ 处可导，则复合函数 $g(f(x))$ 在 x_0 处可导，并且

$$\frac{d}{dx} g(f(x))\Big|_{x=x_0} = g'(f(x_0)) f'(x_0)$$

或写成

$$\frac{dz}{dx}\Big|_{x=x_0} = \frac{dz}{dy}\Big|_{y=f(x_0)} \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$$

- 可推广到多个函数复合：考虑 $w = h(z), z = g(y), y = f(x)$,

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dz}\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

复合函数的导数

例：求 $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 的导数

反函数的导数

定理：设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上连续、严格单调且值域为 (A,B)，又设其反函数 $x=g(y)$ 在 $y_0\in(A,B)$ 处有导数且不为 0，则 $f(x)$ 在 $x_0=g(y_0)$ 处可导，且

$$f'(x_0)=\frac{1}{g'(y_0)}=\frac{1}{g'(f(x_0))}$$

反函数的导数

基本初等函数导数表:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\mathrm{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x$$

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

反函数的导数

对数求导法:

1. 求形如 $f(x)^{g(x)}$ 的函数的导数
2. 将乘除转为加减，简化运算

作业

习题 2.1： 2(2), 10, 13, 14

习题 2.2： 3(5)(6)(7)(10), 4(4)(6)(14)(15)