

2.1 微商的概念

安冬

北京大学北京国际数学研究中心 (BICMR)

andong@bicmr.pku.edu.cn

26-27 学年第 1 学期

微商（导数）的定义

导数的来源：

- ▶ 瞬时速度
- ▶ 曲线切线的斜率

函数 $y = f(x)$ ，计算函数增量 Δy 与自变量增量 Δx 之比的极限

导数的定义

定义：函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上有定义. 对于 $x_0 \in (a, b)$, 若极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 并称这个极限值为 $f(x)$ 在 x_0 处的微商/导数

► 等价写法: 记 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

导数的定义

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

► 记号:

$$f'(x_0), \quad y'(x_0), \quad y'|_{x=x_0}, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}, \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}, \quad \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=x_0}$$

- x_0 是固定的点, Δx 是充分小的变量 (可正可负)
- 可类似定义单侧导数 $f'_+(x_0)$ 和 $f'_-(x_0)$
- 区间上可导: 区间内每一点都可导, $f'(x)$ 称为导函数 (导数)

导数的定义

导数的几何含义：切线斜率

- ▶ $f'(x_0)$ 为正，则切线朝上； $f'(x_0)$ 为负，则切线朝下； $f'(x_0) = 0$ ，则切线水平
- ▶ $|f'(x_0)|$ 越大，则切线越陡

导数的定义

例 1: 对于函数 $f(x) = 1/x$

1. 求它在 $x = 1/2$ 处的导数
2. 求它的导函数

基本初等函数的导函数

一些基本初等函数的导数：

$$(c)' = 0, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

基本初等函数的导函数

例 2: 求以下函数的导数: $f(x) = c$, $f(x) = x^n$, $f(x) = \sqrt{x}$

基本初等函数的导函数

例 3: 求以下函数的导数: $f(x) = \sin x$, $f(x) = \ln x$, $f(x) = e^x$

可导与连续的关系

可导和连续的关系：

1. 可导一定连续
2. 连续不一定可导 ($\sqrt{x}$, $|x|$)



作业

习题 2.1: 2, 6, 12, 13, 14