2.3-2.5 微分

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

无穷小量

无穷小量：以 0 为极限的变量

- 当 $n \to \infty$ 时，$\frac{1}{n}$, q^n $(|q| < 1)$, $\frac{1}{n!}$
- 当 $x \to 0$ 时，x, $1 - \cos x$
- 当 $x \to \infty$，$\frac{1}{x}$
- 连续函数 $f(x)$，当 $\Delta x \to 0$ 时，$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

有限个无穷小量的加减乘仍是无穷小量

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to ?$$

无穷小量

等价无穷小量：设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 当 $x \to a$ 时是两个无穷小量. 若 $g(x) \neq 0$，且

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小量，记为 $f(x) \sim g(x)$ $(x \to a)$.

性质：设 $f(x), g(x), h(x)$ 是当 $x \to a$ 时的无穷小量，则

1. $f(x) \sim f(x)$
2. 若 $f(x) \sim g(x)$，则 $g(x) \sim f(x)$
3. 若 $f(x) \sim g(x), g(x) \sim h(x)$，则 $f(x) \sim h(x)$

无穷小量

常见等价无穷小：（以下均为 $x \to 0$）

- $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$
- $x^2 \sim 2(1-\cos x) \sim 2(\sec x - 1) \sim 2(x - \ln(1+x))$
- $x^3 \sim 2(\tan x - \sin x) \sim 2(\arcsin x - \arctan x) \sim 3(\tan x - x) \sim 3(x - \arctan x) \sim 6(x - \sin x)$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$
- $a^x - 1 \sim x \ln a$

无穷小量

性质：若 $f_1(x) \sim f_2(x)$，$g_1(x) \sim g_2(x)$，且 $\lim_{x\to a}\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ 存在，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

例 1：$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}$

例 2：$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$

无穷小量

高阶无穷小量：设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 当 $x \to a$ 时是两个无穷小量，若存在另一个无穷小量 $\eta(x)$，使得

$$\alpha(x) = \eta(x)\beta(x),$$

则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小量，记为

$$\alpha(x) = o(\beta(x)) \quad (x \to a)$$

例：$x \sin x^2 = o(x^2)$ $(x \to 0)$

无穷小量

性质：当 $x \to a$ 时，$f(x) \sim g(x)$ 的充要条件是 $f(x) = g(x) + o(g(x))$.

无穷小量

同阶无穷小量：$\alpha(x), \beta(x)$ 为无穷小量，且 $\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = l,\ l \neq 0$

n 阶无穷小量：若 $\alpha(x)$ 和 $(x-a)^n$ 为同阶无穷小量，则称 $\alpha(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小量

若 $f(x)$ 是一个无穷大量，则 $\frac{1}{f(x)}$ 是一个无穷小量

微分

微分： 函数增量的线性主要部分

定义： 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义. 若存在一个常数 A，使得

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x),$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处可微，并把 $A\Delta x$ 称做 $f(x)$ 在 x_0 处的微分，记作 df 或 dy.

微分

定理（微分和导数的关系）:

1. $y=f(x)$ 在 x_0 处可微的充分必要条件是 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导
2. 若 $y=f(x)$ 在 x_0 处可微，则 $df=f'(x_0)\Delta x$

微分

微分：函数增量的线性主要部分

- dy 与 Δy 是等价无穷小
- $dx = \Delta x,\ df = f'(x_0)dx$
- 可微和可导虽然相互等价，但概念上不同
- 可微和可导等价仅限于一元函数
- 微分的四则运算与求导一致

$$d(f \pm g) = df \pm dg, \quad d(fg) = gdf + fdg,$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$$

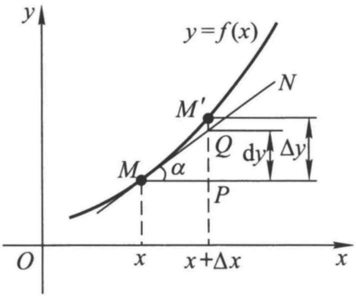

图 2.9

一阶微分的形式不变性

考虑函数 $z=g(y)$

1. 如果 y 是一个自变量，则 $dz=g^{'}(y)dy$
2. 如果有另一个函数 $y=f(x)$，则 $z=g(f(x))$，

$$dz=g^{'}(f(x))f^{'}(x)dx, \quad dy=f^{'}(x)dx \implies dz=g^{'}(y)dy$$

一阶微分的形式不变性：无论 y 是自变量还是中间变量，公式 $dz=g^{'}(y)dy$ 总是成立的

例：$d(e^{\sin x^2})$

一阶微分的形式不变性

一阶微分的形式不变性在函数没有显式表达式时会提供一些方便:

- 隐函数
- 参变量函数

一阶微分的形式不变性

隐函数：若函数 $y=f(x)$ 代入一个二元方程 $F(x,y)=0$ 时使得 $F(x,f(x))=0$，则称 $y=f(x)$ 是方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数

- 存在性？唯一性？
- 在不求解（或很难求解）$F(x,y)=0$ 的条件下，可用一阶微分的形式不变性求隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$

例：$y-x-\epsilon\sin y=0 \quad (0<\epsilon<1)$

一阶微分的形式不变性

例：求 $e^y + xy - e = 0$ 确定的隐函数的导数

一阶微分的形式不变性

参变量函数：自变量 x 和因变量 y 的关系由以下的参数方程决定：

$$\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t). \end{cases}$$

例：

$$\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = b\sin\theta. \end{cases}$$

一阶微分的形式不变性

定理：设 $x = \alpha(t), y = \beta(t)$ 连续、可导，$\alpha^{'}(t)$ 连续，且 $\alpha^{'}(t) \neq 0$. 则参数方程所确定的函数 $y = \beta(\alpha^{-1}(x))$ 可导，且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta^{'}(t)}{\alpha^{'}(t)}$$

一阶微分的形式不变性

例 1：求椭圆切线的斜率

例 2：设 $y = f(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 决定，求 $\frac{dy}{dz}$

微分与近似计算

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

例：求 $\sqrt{4.6}$ 和 $\sqrt{8.2}$ 的近似值

作业

习题 2.5： 1(2), 2, 7, 8(3), 9(2), 10(2)