2.6 高阶导数和高阶微分

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

高阶导数

$$f(x) \xrightarrow{\text{求导}} f'(x) \xrightarrow{\text{求导}} f''(x) \xrightarrow{\text{求导}} \cdots$$

定义：

- $f'(x)$ 在 x_0 处的导数，称为 $f(x)$ 在 x_0 处的二阶导数，记作
  $f''(x_0), f^{(2)}(x_0), y''\big|_{x=x_0}, y^{(2)}\big|_{x=x_0}, \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}, \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0}$
- $f''(x)$ 在 x_0 处的导数，称为 $f(x)$ 在 x_0 处的三阶导数，记作
  $f'''(x_0), f^{(3)}(x_0), y'''\big|_{x=x_0}, y^{(3)}\big|_{x=x_0}, \left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=x_0}, \left.\frac{d^3f}{dx^3}\right|_{x=x_0}$
- 类似地，$f(x)$ 的 $(n-1)$ 阶导数的导数称为 $f(x)$ 的 n 阶导数，记作
  $f^{(n)}(x_0), y^{(n)}\big|_{x=x_0}, \left.\frac{d^ny}{dx^n}\right|_{x=x_0}, \left.\frac{d^nf}{dx^n}\right|_{x=x_0}$

二阶导数的几何含义：加速度，凸性

高阶导数

例 1： $f(x) = \sin x$

例 2： $f(x) = \frac{1}{x}$

高阶导数

四则运算：

$$
\begin{aligned}
(f(x) \pm g(x))^{(n)} &= f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x) \\
(cf(x))^{(n)} &= cf^{(n)}(x) \\
(f(x)g(x))^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)
\end{aligned}
$$

复合函数：Faà-di-Bruno 公式

高阶导数

例 1： $f(x) = x^2 \sin x$

例 2： 设 y 是由 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 确定的关于 x 的函数，求 y''

高阶微分

函数 $y = f(x)$，一阶微分

$$dy = f'(x)dx$$

把 dy 看成 x 的函数，可以再求一次微分

$$d^2y = f''(x)dx^2$$

类似定义 n 阶微分

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$$

- 计算上和求高阶导数一致
- 注意区分记号：$d(x^2)$，$(dx)^2$，dx^2，d^2x
- 高阶微分不具有形式不变性

作业

习题 2.6： 4, 7, 8