

3.1 微分中值定理

安冬

北京大学北京国际数学研究中心 (BICMR)

andong@bicmr.pku.edu.cn

26-27 学年第 1 学期

微分中值定理

微分中值定理：反映导数局部性质与函数整体变化关系的一系列定理

罗尔中值定理

定理（罗尔中值定理）：设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续， (a, b) 上可导，并且 $f(a) = f(b)$ ，则必存在一点 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = 0$

- ▶ 点 c 非端点，可以不唯一
- ▶ 几何解释
- ▶ 三个条件缺一不可

罗尔中值定理

例 1: 证明 $f(x) = x(x+1)(x-3)(x+5)$ 的导函数 $f'(x)$ 至少有三个实根

拉格朗日中值定理

定理（拉格朗日中值定理/微分中值定理）：设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续， (a, b) 上可导，则必存在一点 $c \in (a, b)$ 使得

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- ▶ 点 c 非端点，可以不唯一
- ▶ 几何解释
- ▶ 证明：构造辅助函数
- ▶ 其它等价形式：

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(c)(x - x_0), \quad \exists c \text{ 介于 } x_0 \text{ 和 } x \text{ 之间} \\ f(x_0 + \Delta x) &= f(x_0) + f'(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x, \quad \exists \theta \in (0, 1) \end{aligned}$$

应用：常值函数的导数

定理：设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导，且导函数 $f'(x)$ 处处为 0，则 $f(x)$ 为常值函数

推论：若在 (a, b) 上恒有 $f'(x) = g'(x)$ ，则存在一个常数 C 使得 $f(x) = g(x) + C$

应用：函数单调性

定理：设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续， (a, b) 上可导，

1. 若 $f'(x) > 0$ (≥ 0), $\forall x \in (a, b)$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格递增 (递增)
2. 若 $f'(x) < 0$ (≤ 0), $\forall x \in (a, b)$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格递减 (递减)

► 几何意义：切线斜率的正负

应用：证明不等式

例 2：证明 $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|, \quad \forall x, y$

例 3：证明 $e^x > 1 + x, \quad \forall x \neq 0$

例 4：证明 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad \forall x > 0$

柯西中值定理

定理（柯西中值定理）：设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续， (a, b) 上可导，且 $g'(x) \neq 0$ ，则必存在一点 $c \in (a, b)$ 使得

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

► 几何解释：参数方程

总结

微分中值定理： $f(x)$ 和 $g(x)$ 闭区间连续，开区间可导，则

1. 罗尔：若 $f(a) = f(b)$ ，则存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = 0$
2. 拉格朗日：存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
3. 柯西：若 $g'(x) \neq 0$ ，则存在 $c \in (a, b)$ 使得 $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

作业

习题 3.1: $4(1)$, 7 , 11 , 14