

3.2 函数的单调性 · 极值

安冬

北京大学北京国际数学研究中心 (BICMR)

andong@bicmr.pku.edu.cn

26-27 学年第 1 学期

单调性

递增函数：

$$f(x_1) \leq f(x_2), \quad \forall x_1 < x_2$$

递减函数：

$$f(x_1) \geq f(x_2), \quad \forall x_1 < x_2$$

严格递增（严格递减）：定义中的不等号 $\leq$ ($\geq$) 改为严格不等号 $<$ ($>$)

单调性

定理：设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续， (a, b) 上可导，

1. 若 $f'(x) > 0$ (≥ 0), $\forall x \in (a, b)$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格递增 (递增)
2. 若 $f'(x) < 0$ (≤ 0), $\forall x \in (a, b)$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格递减 (递减)

► 几何意义：切线斜率的正负

► 证明：中值定理

单调性

例 1: 求函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间

极值

定义 (极值点): 称 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点, 如果存在 x_0 的一个邻域 $U_\delta(x_0)$, 使得

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \quad \text{或} \quad f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in U_\delta(x_0)$$

- ▶ 前者称为极大值点, 后者称为极小值点
- ▶ 极值点的定义要求双侧, 区间端点天然不在考虑范围之内
- ▶ 极值点是局部性质: 极值不一定是最大/最小值

极值

定理（费马定理）：若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，并且 $f(x)$ 在 x_0 处可导，那么 $f'(x_0) = 0$.

- ▶ 几何意义：极值点处切线与 x 轴平行

定义（稳定点）：导数等于 0 的点称为稳定点（或驻点、临界点）

- ▶ 对于可导函数：极值点一定是稳定点，但稳定点不一定是极值点
- ▶ 注意函数不可导的点，也有可能是极值点

极值点判别法：不可导或一阶可导

定理：设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内可导，在 x_0 处连续. 当 x 由小到大经过 x_0 时，

1. 若 $f'(x)$ 由正变为负（负变为正），则 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的极大值点（极小值点）
2. 若 $f'(x)$ 不变号，则 $x = x_0$ 不是极值点

极值点判别法：不可导或一阶可导

例 2：求函数 $f(x) = (x-1)^2(x+1)^3$ 的极值点

极值点判别法：不可导或一阶可导

例 3：求函数 $f(x) = 1 - (x - 1)^{2/3}$ 的极值点

极值点判别法：二阶可导

定理：设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，且 $f'(x_0) = 0$.

1. 若 $f''(x_0) < 0$ ，则 x_0 为极大值点
2. 若 $f''(x_0) > 0$ ，则 x_0 为极小值点
3. 若 $f''(x_0) = 0$ ，则不能判定 x_0 是否为极值点

极值

判断极值点的一般思路：

1. 求出 $f(x)$ 的所有稳定点（导数为 0 的点）和不可导点
2. 判断这些点是否为极值点

作业

习题 3.2: 2, 11, 12(2)