3.3 有理式的不定积分与有理化方法

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

不定积分

常见的可以积出来的不定积分:

- 有理式
- 三角函数的有理式
- 某些根式的有理式

有理式的不定积分

形如：

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是两个多项式

核心步骤：有理式的分解

有理式的不定积分

例 1: 求

$$\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}dx$$

有理式的不定积分

例 2: 求

$$\int \frac{4}{x^3 + 4x} dx$$

有理式的不定积分：一般理论

定义（多项式）：一个多项式 $P(x)$ 可以写成

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0, \quad (c_n \neq 0)$$

- c_i：系数，c_n：首项系数
- n：次数/度
- 两个多项式恒等 $\Leftrightarrow$ 两个多项式的对应项系数全都相等
- 重要性质：
  - 多项式的四则运算
  - 多项式的根

有理式的不定积分：一般理论

多项式的四则运算：加、减、乘法是直接的

多项式的除法：对于任意的多项式 $P(x)$ 和非常数多项式 $D(x)$，我们可以做除法

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x), \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

其中 $Q(x)$ 和 $R(x)$ 是两个多项式，且 $R(x)$ 的次数比 $Q(x)$ 的次数小

- $P(x)$：被除式，$Q(x)$：除式，$D(x)$：商式，$R(x)$：余式
- 类比整数的除法：

$$31 \div 7 = 4 \cdots\cdots 3$$
$$P(x) \div Q(x) = D(x) \cdots\cdots R(x)$$

有理式的不定积分：一般理论

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

具体做法：凑式或长除法

例：化简

$$\frac{x^4 - x^2 + 2x + 3}{x^2 + x - 2}$$

有理式的不定积分：一般理论

多项式的根：使 $Q(x) = 0$ 的 x 的值

定理（代数基本定理）：n 次实系数多项式在复数范围内一定有 n 个根（包括重根），且可分为两大类：

1. 实数根
2. 共轭复根：若 z 为一个根，则 $\bar{z}$ 也是一个根

有理式的不定积分：一般理论

推论（因式分解）：一个 n 次多项式 $Q(x)$ 可分解为

$$Q(x) = c_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

或

$$Q(x) = c_n(x-a_1)^{n_1}\cdots(x-a_k)^{n_k}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_lx+q_l)^{m_l}$$

- a_i 是不同的实根，重数为 n_i，$p_i^2-4q_i<0$

例子：

$$x^3-5x^2+8x-4=(x-1)(x-2)^2$$
$$x^3-2x^2+5x-6=(x-2)(x^2+2x+2)$$

有理式的不定积分：一般理论

考虑积分

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

步骤：检查积分 $\to$ 分母因式分解 $\to$ 真分式分解 $\to$ 算积分

有理式的不定积分：一般理论

1. 检查积分，使其满足两个条件：
   - 不可约，即 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 没有公因子。若有，则先约分
   - 真分式，即 $Q(x)$ 的次数大于 $P(x)$ 的次数。若不是，则先做 $P(x) \div Q(x)$ 化为 "多项式 + 真分式"

（以下假设 $P(x)/Q(x)$ 是不可约真分式）

2. 将分母 $Q(x)$ 做因式分解

$$Q(x) = c_n(x-a_1)^{n_1}\cdots(x-a_k)^{n_k}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_lx+q_l)^{m_l}$$

其中 a_i 是不同的实根，重数为 n_i，$p_i^2 - 4q_i < 0$

有理式的不定积分：一般理论

3. 将真分式 $P(x)/Q(x)$ 分解成以下四类部分分式之和

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{A}{(x-a)^n},\quad \frac{Bx+D}{x^2+px+q},\quad \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^n}$$

即（待定系数法）

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{21}}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{n_1 1}}{(x-a_1)^{n_1}} \\ & + \cdots\cdots \\ & + \frac{B_{11}x+D_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_{21}x+D_{21}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \cdots + \frac{B_{m_1 1}x+D_{m_1 1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}} \\ & + \cdots\cdots\end{aligned}$$

其中未知系数通过比较左右两边确定，有两种方法：

- 比较同次项的系数，让他们相等，解方程（通用方法）
- 代入特殊值求解（通常更简单）

有理式的不定积分：一般理论

4. 计算每一个部分分式的不定积分

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^n}, \quad \frac{Bx+D}{x^2+px+q}, \quad \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^n}$$

有理式的不定积分

例 3: 求

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$$

有理式的不定积分

例 4: 求

$$\int \frac{x^3+x^2+2}{x(x^2+2)^2}dx$$

有理式的不定积分

例 5: 求

$$\int \frac{x^3}{x^2+x-2}dx$$

三角函数的有理式的不定积分

考虑积分

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

其中 $R(y, z)$ 是一个二元有理式

- 要求:
  - 不含根式
  - 不含其它函数
  - 三角函数的自变量必须相同（若不同，先考虑能否恒等变形化为相同的）
- 例子:
  - 正例:

$$\frac{\cos^2 x + \sin^5 x}{2\sin x}, \quad \frac{\tan x}{\sin x + \sec^2 x}$$

  - 反例:

$$\sqrt{1+\sin^2 x}, \quad x\sin x, \quad \sin(x^2) + \cos x, \quad \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \sin x$$

三角函数的有理式的不定积分

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

1. 万能替换：

$$t = \tan\frac{x}{2}, \quad x = 2\arctan t$$

2. 应用万能公式和微分关系

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

$$\Longrightarrow \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

3. 计算有理式的积分

三角函数的有理式的不定积分

例 1：求

$$\int \frac{\cot x}{\sin x + \cos x - 1} dx$$

三角函数的有理式的不定积分

例 2: 求

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx$$

某些根式的有理式

考虑积分

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

其中 $R(y, z)$ 是一个二元有理式

某些根式的有理式

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

1. 变量替换：

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}, \quad dx = \left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}\right)' dt$$

2. 计算有理式的积分

某些根式的有理式

例: 求

$$\int \frac{1}{3x + \sqrt[3]{3x+2}} dx$$

作业

习题 3.3： 2, 4, 8, 17, 26