

3.4 曲线的凹凸性与拐点 · 函数图形的作法

安冬

北京大学北京国际数学研究中心 (BICMR)

andong@bicmr.pku.edu.cn

26-27 学年第 1 学期

凹凸性

凹凸性：函数图像向哪个方向弯曲的性质

我们将按函数不同的光滑性来讨论，且只讨论严格凹凸性

凹凸性：无导数

定义（凹凸性）：设 $f(x)$ 是 (a, b) 上的一个函数. 若对于任意互异的 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 和任意的 $\lambda \in (0, 1)$, 都有

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) < f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2),$$

则称 $f(x)$ 是一个向上凸（凸）函数. 若不等式符号为 $>$, 则称为向下凸（凹）函数.

- ▶ 几何意义：两点连线与函数图像的位置关系
- ▶ 凹凸性的名字

凹凸性：一阶导数

定义（凹凸性）：设 $f(x)$ 是 (a, b) 上的一个一阶可导函数. 若对于每一点 $x_0 \in (a, b)$, 都有

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x \in (a, b), x \neq x_0,$$

则称 $f(x)$ 是一个向上凸（凸）函数. 若不等式符号为 $>$, 则称为向下凸（凹）函数.

- ▶ 几何意义：函数图像与切线的位置关系
- ▶ 思考：两个定义在一阶可导时是否等价？

凹凸性：一阶导数

定理：设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导，则 $f(x)$ 为凸（凹）函数的充要条件是 $f'(x)$ 在 (a, b) 上严格单调递减（增）

凹凸性：二阶导数

定理：设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上二阶可导.

1. 若对于任意的 $x \in (a, b)$, 都有 $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 是凸的
2. 若对于任意的 $x \in (a, b)$, 都有 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 是凹的

► 二阶导数符号仅为凹凸性的充分条件

凹凸性

例 1: 研究函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ 的凹凸性.

凹凸性

例 2: 研究函数 $f(x) = x^{1/3}$ 的凹凸性.

拐点

定义 (拐点): 如函数 $f(x)$ 在 c 点连续, 且两侧附近的凹凸性相反, 则称该点为拐点.

定理: 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上有连续的二阶导数. 若点 $c \in (a, b)$ 为拐点, 则 $f''(c) = 0$.

- ▶ 逆命题不成立
- ▶ 找拐点的方法: 看二阶导数为 0 的点和二阶导数不存在的点

拐点

例 3: 研究函数 $f(x) = e^{-|x|}$ 的凹凸性和拐点.

导数与函数的性质

- ▶ 一阶导数的正负：单调性
- ▶ 二阶导数的正负：凹凸性

渐近线

定义 ($x \rightarrow +\infty$ 的渐近线): 设函数 $f(x)$ 定义在区间 $(c, +\infty)$ 上, 称 $y = ax + b$ 是 $y = f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 的一条渐近线, 如果当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 点 $(x, f(x))$ 与直线 $y = ax + b$ 的距离趋向于 0.

定理: 在上面的条件和记号下, 渐近线的充要条件是

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$$

- ▶ 对 $x \rightarrow -\infty$ 也成立
- ▶ $a = 0$: 水平渐近线; $a \neq 0$: 斜渐近线
- ▶ 垂直渐近线: 当 $x \rightarrow c$ (或单侧) 时, $f(x) \rightarrow +\infty$ 或 $f(x) \rightarrow -\infty$, 则 $x = c$ 是一条垂直渐近线

渐近线

例 4: 求曲线 $y = \frac{x^3+x+1}{(x+1)^2}$ 的渐近线

函数作图

1. 考察对称性、奇偶性
2. 求函数的定义域
3. 考察连续性、可导性，单独处理间断点和不可导点，考察有无渐近线
4. 单调性：求导数，找出稳定点、单调区间和极值点
5. 凹凸性：求二阶导数，确定凹凸性和拐点

函数作图

例 5: 作函数 $y = \frac{x^2}{x-1}$ 的图形

作业

习题 3.4: 4, 7, 14