3.5 定积分的若干应用

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

曲线的三种表示

函数表示:

$$y = f(x), \quad a \le x \le b$$

参数方程:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta$$

极坐标:

$$r = r(\theta), \quad \alpha \le \theta \le \beta$$

曲线的三种表示

三种形式之间的互相转化

例:

- 函数表示化参数方程:

$$y = f(x) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = t, \\ y = f(t) \end{cases}$$

- 极坐标化参数方程:

$$r = r(\theta) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta, \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

图形的面积

函数表示:

- $y = f(x)$ 与 $x = a, x = b$ 和 x 轴围成的有向面积

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

- $x = g(x)$ 与 $y = a, y = b$ 和 y 轴围成的有向面积

$$S = \int_a^b g(y)dy$$

  - 推导方法: 分割 $\to$ 近似 $\to$ 求和 $\to$ 取极限

极坐标: $r = r(\theta)$ 与 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 围成的面积

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta$$

图形的面积

例 1: 求曲线 $y = x^2$ 和 $y = \sqrt{x}$ 围成的面积

例 2: 求曲线 $y^2 = 4x$ 和 $4x - 3y = 4$ 围成的面积

例 3: 求曲线 $r(\theta) = a\sin 3\theta$ 所围成图形的面积

曲线的弧长

参数方程：从 $t=\alpha$ 到 $t=\beta$ 段的弧长

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$$

函数表示：$y=f(x)$ 从 $x=a$ 到 $x=b$ 段的弧长

$$s=\int_{a}^{b}\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

极坐标：$r=r(\theta)$ 从 $\theta=\alpha$ 到 $\theta=\beta$ 段的弧长

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}d\theta$$

曲线的弧长

例 1: 求下面曲线在 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 上的弧长

$$\begin{cases} x = R(\theta - \cos\theta) \\ y = R(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

例 2: 求椭圆的周长

立体的体积

旋转体：$y = f(x) \geq 0$ 与 $x = a, x = b$ 及 x 轴围成的图形，绕 x 轴一圈的旋转体体积

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

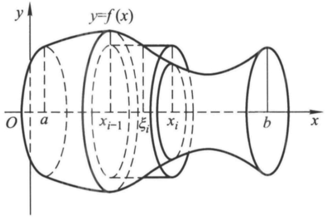

图 3.9

截面积已知的立体体积：位于过 $x = a, x = b$ 且垂直于 x 轴的两个平面之间，且在 x 点处横截面积为 $A(x)$

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

立体的体积

例：求椭圆 $4(x-4)^2+9y^2=9$ 绕下列直线旋转一周所形成的旋转体的体积

(1) x 轴; (2) y 轴; (3) 直线 $x=1$

旋转体的侧面积

函数表示：$y = f(x) \geq 0$ 在 $x = a$ 和 $x = b$ 之间的曲线弧绕 x 轴旋转一周形成的旋转体侧面积

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

参数方程：参数方程在 $t = \alpha$ 和 $t = \beta$ 之间的曲线弧绕 x 轴旋转一周形成的旋转体侧面积

$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

极坐标：$r = r(\theta)$ 在 $\theta = \alpha$ 和 $\theta = \beta$ 之间的曲线弧绕 x 轴旋转一周形成的旋转体侧面积

$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi r(\theta)\sin\theta\sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}d\theta$$

微元法

求一个未知量 Q，若

$$\Delta Q = q(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

即

$$dQ = q(x)dx,$$

则

$$Q = \int_a^b dQ = \int_a^b q(x)dx$$

- 近似要用线性主要部分（即微分）

作业

习题 3.5：3, 8, 9(1), 19, 23