

3.5 求未定式的极限

安冬

北京大学北京国际数学研究中心 (BICMR)

andong@bicmr.pku.edu.cn

26-27 学年第 1 学期

0/0 型未定式

$f(x)$ 和 $g(x)$ 在 a 附近有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 存在, 考虑

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, 我们称它为 0/0 型未定式

- ▶ 0/0 型极限可能存在, 也可能不存在 (震荡或无穷)

0/0 型未定式

定理（洛必达法则）：若 $f(x), g(x)$ 满足

1. $f(x), g(x)$ 在点 a 的一个空心邻域内可导
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$
3. 在该邻域内 $g'(x) \neq 0$
4. 极限 $\lim_{x \rightarrow a} (f'(x)/g'(x))$ 存在

则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- ▶ 单侧极限也成立
- ▶ 只对未定式成立
- ▶ 核心逻辑：导数比值极限存在 $\implies$ 原比值极限存在且相等
- ▶ 实际题目中经常要多次洛必达，或与其它技巧结合使用

0/0 型未定式

例 1: 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

0/0 型未定式

例 2: 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sqrt{x} - \sin \sqrt{x}}{x^{3/2}}$$

0/0 型未定式

a 可以是 $\infty, +\infty, -\infty$

定理 (洛必达法则): 若 $f(x), g(x)$ 满足

1. $f(x), g(x)$ 在 $\mathbb{R} \setminus [-A, A]$ 可导
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$
3. 在该区域内 $g'(x) \neq 0$
4. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f'(x)/g'(x))$ 存在

则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

∞/∞ 型未定式

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

∞/∞ 型未定式: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

定理: 若 $f(x), g(x)$ 满足

1. $f(x), g(x)$ 在点 a 的一个空心邻域内可导
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$
3. 在该邻域内 $g'(x) \neq 0$
4. 极限 $\lim_{x \rightarrow a} (f'(x)/g'(x))$ 存在

则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

► 单侧极限或 a 为 $\infty, +\infty, -\infty$ 等情况均成立

∞/∞ 型未定式

例 3: 求

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} (a > 0)$$

其他未定式

基本思路：恒等变形后转化为 $0/0$ 型或者 ∞/∞ 型，再用洛必达法则

1. $0 \cdot \infty$ 型： $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow \infty$ ，考虑 $f(x)g(x)$ 的极限
▶ 考虑 $\frac{f(x)}{1/g(x)}$ 或 $\frac{g(x)}{1/f(x)}$
2. $\infty - \infty$ 型： $f(x) \rightarrow +\infty, g(x) \rightarrow +\infty$ ，考虑 $f(x) - g(x)$ 的极限
▶ 尝试通分
3. 0^0 型： $f(x) \rightarrow 0 + 0, g(x) \rightarrow 0 + 0$ ，考虑 $f(x)^{g(x)}$ 的极限
▶ 取对数
4. ∞^0 型： $f(x) \rightarrow +\infty, g(x) \rightarrow 0 + 0$ ，考虑 $f(x)^{g(x)}$ 的极限
▶ 取对数
5. 1^∞ 型： $f(x) \rightarrow 1, g(x) \rightarrow +\infty$ ，考虑 $f(x)^{g(x)}$ 的极限
▶ 取对数

其他未定式

例 4: 求

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x \ln x, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

其他未定式

例 5: 求

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x, \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2-0} (\tan x)^{\cos x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

洛必达法则的注意事项

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- ▶ 只对未定式成立，不能用于非未定式（考虑 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + \sin x}$ ）
- ▶ 核心逻辑：导数比值极限存在 $\implies$ 原比值极限存在且相等
 - ▶ 若导数比值极限不存在，则无法判断原比值极限是否存在（考虑 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos x}{x}$ ）

作业

习题 3.5: 5, 9, 11, 15, 24, 26