

3.6 泰勒公式

安冬

北京大学北京国际数学研究中心 (BICMR)

andong@bicmr.pku.edu.cn

26-27 学年第 1 学期

多项式逼近函数

微分：线性函数（一次多项式）逼近

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

► 思路：用切线来逼近

► 数学上：使一次多项式在 x_0 点处函数值和导数值与 $f(x)$ 相同

高次多项式：考虑更高阶的导数

► 二次多项式：

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

► 一般地：

$$\begin{aligned} f(x) \approx & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots \\ & + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \end{aligned}$$

泰勒公式

定理 (泰勒公式): 设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义, 且 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时, 有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

- ▶ 局部多项式逼近
- ▶ 忽略掉无穷小量的多项式被称为泰勒多项式
- ▶ $x_0 = 0$ 的泰勒公式被称为麦克劳林公式

泰勒公式

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

泰勒公式

定理 (泰勒公式的唯一性): 设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义, 且 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导. 如果存在常数 A_k , 使得当 $x \rightarrow x_0$ 时有

$$f(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \cdots + A_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

则这一公式必定是泰勒公式, 即

$$A_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

► 求泰勒公式, 不一定要算各阶导数

► 其他常用方法: 函数四则运算, 复合函数, 求导或积分等

► 常用的无穷小计算: $x^m \times o(x^n) = o(x^{m+n})$, $o(x^n) + o(x^m) = o(x^{\min\{m,n\}})$

泰勒公式

例 1: 求 $\cos(2x) \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒公式, 至 x^4 项

泰勒公式的应用：求极限

例 2：求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2}$$

例 3：求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x}{2} \sin x}{\sin x - x \cos x}$$

泰勒公式的余项

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$o((x-x_0)^n)$ 称为佩亚诺余项

局限性:

- ▶ 公式只在 $x \rightarrow x_0$ 时有意义
- ▶ 余项大小的刻画不够精准

带拉格朗日余项的泰勒公式

定理（带拉格朗日余项的泰勒公式）：设 $f(x)$ 在 (a, b) 内 $n+1$ 阶可导. 则对任意的 $x_0, x \in (a, b)$, 存在一点 ξ 介于 x_0 和 x 之间, 使得

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \\ + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

- ▶ 拉格朗日中值定理的推广
- ▶ 不再是局部逼近, 但条件比带佩亚诺余项的泰勒公式强
- ▶ 可用于估计多项式逼近的误差

带拉格朗日余项的泰勒公式

例 4: 设 $-\pi/4 < x < \pi/4$, 利用泰勒多项式近似 $\sin x$ 时, 为使公式误差小于 5×10^{-7} , 应在泰勒公式中取多少项?

作业

习题 3.6: $1(2)$, $2(2)$, $3(1)$, $4(2)$, $5(1)$