4.1 微分中值定理

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

罗尔中值定理

定理（罗尔中值定理）：设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，(a, b) 上可导，并且 $f(a) = f(b)$，则必存在一点 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = 0$

- 点 c 非端点，可以不唯一
- 几何解释

拉格朗日中值定理

定理（拉格朗日中值定理/微分中值定理）：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 上可导，则必存在一点 $c \in (a,b)$ 使得

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

- 点 c 非端点，可以不唯一
- 几何解释
- 证明常用套路：构造辅助函数
- 其它等价形式：

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0), \quad \exists\, c \text{ 介于 } x_0 \text{ 和 } x \text{ 之间}$$
$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x, \quad \exists\, \theta \in (0,1)$$

应用：函数单调性

定理：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 上可导且导函数 $f'(x)$ 处处为 0，则 $f(x)$ 为常值函数

定理：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 上可导，

1. 若 $f'(x) > 0\ (\geq 0), \forall x \in (a,b)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增（递增）
2. 若 $f'(x) < 0\ (\leq 0), \forall x \in (a,b)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递减（递减）

- 几何意义：切线斜率的正负
- 严格单调性的逆命题不成立

应用：函数单调性

例：讨论函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 的单调性

应用：证明不等式

例 1：证明 $e^x > 1 + x, \quad \forall\ x \neq 0$

例 2：证明 $\frac{x}{1+x} < \ln(1 + x) < x, \quad \forall\ x > 0$

应用：证明等式

常用套路：构造辅助函数

例 1：证明对于任意的实数 a, b，方程 $a\cos x + b\cos(2x) = 0$ 在 $[0, \pi]$ 内都有零点

例 2：设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，(a, b) 上可导，且 $f(a) = f(b) = 0$，证明：存在一点 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) + f'(c) = 0$

积分中值定理

例 3：从微分中值定理推出积分中值定理

柯西中值定理

定理（柯西中值定理）：设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 上可导，且 $g'(x)\neq 0$，则必存在一点 $c\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

- 几何解释：参数方程

达布中值定理

定理（达布中值定理）：设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导，则其导数 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上可取 $f'(a)$ 和 $f'(b)$ 之间的任意值

- 导数不一定连续
- 导函数不可能有第一类间断点

总结：中值定理

连续函数中值定理：连续函数的值域是一个区间

微分中值定理：$f(x)$ 和 $g(x)$ 闭区间连续，开区间可导，则

1. 罗尔：若 $f(a)=f(b)=0$，则存在 c 使得 $f'(c)=0$
2. 拉格朗日：存在 c 使得 $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
3. 柯西：若 $g'(x)\neq 0$，则存在 c 使得 $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

积分中值定理：$f(x)$ 闭区间连续，则存在 c 使得 $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$

达布中值定理：导函数不可能有第一类间断点

作业

习题 4.1： 6, 11