

4.1 原函数与不定积分的概念

4.2 基本积分表 · 不定积分的简单性质

安冬

北京大学北京国际数学研究中心 (BICMR)

andong@bicmr.pku.edu.cn

26-27 学年第 1 学期

原函数

原函数：若在区间 (a, b) 上，都有 $F'(x) = f(x)$ ，则我们称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数

- ▶ 实际含义：

- ▶ 物理：已知每个时刻的速度，反推运动轨迹
- ▶ 几何：已知每点处切线斜率，反推曲线形状

- ▶ 原函数不唯一：

- ▶ 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则 $F(x) + C$ 也是（其中 C 是任意常数）
- ▶ 所有可能的原函数都可以写成 $F(x) + C$ 的形式

- ▶ 原函数存在性？

不定积分的定义

求导: $f \mapsto f'$

不定积分: $f \mapsto \{f \text{ 所有的原函数}\}$

定义 (不定积分): 对于一个函数 $f(x)$, 其原函数的一般表达式称为 $f(x)$ 的不定积分, 记作

$$\int f(x) dx$$

- ▶ $f(x)$: 被积函数. $f(x)dx$: 被积表达式. x : 积分变量
- ▶ 若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (C \text{ 为任意常数})$$

不定积分的基本性质

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad d\int f(x)dx = f(x)dx$$
$$\int F'(x)dx = F(x) + C, \quad \int dF(x) = F(x) + C$$

例 1:

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

不定积分表

$$\int 1 dx = x + C, \quad \int k dx = kx + C, \quad \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (a > 0, a \neq 1), \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

常数的理解

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + 1 + C?$$

C: 可以取任意值的常值函数, 能够吸收任何形式的其他常值函数

$$+C \Leftrightarrow +1 + C \Leftrightarrow -1 + C \Leftrightarrow +2C \Leftrightarrow +\frac{C}{3} \Leftrightarrow +C_1 + C_2 \Leftrightarrow +C_1 - 8C_2 + 2C_3$$

从集合的角度理解常数 C 和不定积分

$$\int f(x) dx = \{f(x) \text{ 的所有原函数}\}$$

$$\{F(x) + C\} = \{F(x) + 1 + C\} = \{F(x) + 2C\} = \{F(x) + C_1 + C_2\}$$

基本运算法则

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$
$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx \quad (c \neq 0)$$

例题

例 2: 求以下积分

$$\int (6x^2 - 3x + 5) dx, \quad \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx, \quad \int \left(\frac{1}{x} - 2^x + 3 \sin x \right) dx$$

例题

例 3: 求以下积分

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

例题

例 4: 已知曲线 $y = f(x)$ 上任意一点的切线的斜率是 $4x^3$, 且该曲线通过 $(1, 2)$, 求该曲线

作业

习题 4.2: 2, 7, 10, 11