4.3 泰勒公式
4.4 关于泰勒公式的余项

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

多项式逼近函数

微分：线性函数（一次多项式）逼近

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

- 思路：用切线来逼近
  - 数学上：使一次多项式在 x_0 点处函数值和导数值与 $f(x)$ 相同

高次多项式：考虑更高阶的导数

- 二次多项式：

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

- 一般地：

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

泰勒公式

定理（泰勒公式）：设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，且 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，则当 $x \to x_0$ 时，有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

- 局部多项式逼近
- $x_0 = 0$ 的泰勒公式被称为麦克劳林公式

泰勒公式

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

泰勒公式

定理（泰勒公式的唯一性）：设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，且 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导. 如果存在常数 A_k，使得当 $x \to x_0$ 时有

$$f(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \cdots + A_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

则这一公式必定是泰勒公式，即

$$A_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

- 求泰勒公式，不一定要算各阶导数
  - 其他常用方法：函数四则运算，复合函数，求导或积分等
  - 常用的无穷小计算：$x^m \times o(x^n) = o(x^{m+n})$, $o(x^n) + o(x^m) = o(x^{\min\{m,n\}})$

泰勒公式

例 1：求 $e^{\cos x}$ 在 $x = 0$ 处的泰勒公式，至 x^4 项

例 2：求 $\cos(2x)\ln(1+x)$ 在 $x = 0$ 处的泰勒公式，至 x^4 项

泰勒公式的应用：求极限

例 1：求

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x}{2}\sin x}{\sin x - x\cos x}$$

例 2：求

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right]$$

泰勒公式的余项

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$o((x-x_0)^n)$ 称为佩亚诺余项

局限性：

- 公式只在 $x \to x_0$ 时有意义
- 余项大小的刻画不够精准

泰勒公式的余项

定理（带拉格朗日余项的泰勒公式）：设 $f(x)$ 在 (a,b) 内 $n+1$ 阶可导. 则对任意的 $x_0, x \in (a,b)$，存在一点 ξ 介于 x_0 和 x 之间，使得

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

- 拉格朗日中值定理的推广
- 不再是局部逼近，但条件比带佩亚诺余项的泰勒公式强
- 可用于估计多项式逼近的误差

应用：定积分的近似计算

$$\int_a^b f(x)dx$$

思路：分割 $\to$ 近似 $\to$ 求和

- 分割：$\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + i\Delta x$, 考虑每个区间 $[x_{i-1}, x_i]$

近似：

- 矩形法：$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx f(x_{i-1})\Delta x$
- 梯形法：$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\Delta x$
- 辛普森法

近似误差可以用泰勒公式来证明

泰勒公式的余项

定理（带积分余项的泰勒公式）：设 $f(x)$ 在 (a,b) 内 $n+1$ 阶可导，且 (n+1) 阶导函数连续. 则对任意的 $x_0, x \in (a,b)$，有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

- 微积分基本定理的推广

反例

泰勒公式并不是总有意义的，例如：

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- $f(x)$ 的任意阶导数在 0 处都等于 0
- 0 处的泰勒公式：

$$f(x) = 0 + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

作业

习题 4.4： 1(2), 4(3), 5