

4.3 换元积分法

安冬

北京大学北京国际数学研究中心 (BICMR)

andong@bicmr.pku.edu.cn

26-27 学年第 1 学期

不定积分

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

$$\int 1 dx = x + C, \quad \int k dx = kx + C, \quad \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (a > 0, a \neq 1), \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

第一换元法

设 $F'(u) = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 可导, 则

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$$

▶ 还可写成

$$\begin{aligned}\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx &= \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) \quad (u = \varphi(x)) \\ &= \int f(u)du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C\end{aligned}$$

- ▶ 不定积分中微分记号的合理性
- ▶ 核心：凑微分

第一换元法

例 1: 求积分

$$\int (2x + 5)^{3/2} dx \qquad \int \cos(3x + 2) dx$$

第一换元法

例 2: 求积分 (其中 $a > 0$)

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \int \frac{dx}{a^2 - x^2}$$

第一换元法

例 3: 求积分

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx \quad \int 2xe^{x^2} dx \quad \int \frac{dx}{x(1+2\ln x)}$$

第一换元法

例 4: 求积分

$$\int \sin^2 x \cos x dx \qquad \int \tan x dx$$

第一换元法

例 5: 求积分 (其中 $|a| \neq |b|$)

$$\int \sin(ax) \sin(bx) dx \quad \int \sin^2 x dx$$

第一换元法

例 6: 求积分

$$\int \frac{dx}{\sin x} \quad \int \frac{dx}{\cos x}$$

第一换元法

例 7: 求积分

$$\int \sec^6 x dx$$

第一换元法：总结

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C$$

- ▶ 核心：凑微分
- ▶ 常用场合：含线性函数的积分，三角函数的积分

第二换元法

步骤:

1. 将 x 视为中间变量, 令 $x = \varphi(t)$
2. 应用第二换元公式

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

3. 如果 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 的原函数是 $G(t)$, 那么

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = G(t) + C = G(\varphi^{-1}(x)) + C$$

- ▶ 核心: 变量替换 $x = \varphi(t)$ 中 φ 的选取
- ▶ 两个要求:
 - ▶ 可导且有反函数
 - ▶ $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 比较好积

第二换元法

例 8: 求积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + 1}$$

第二换元法

例 9: 求积分 (其中 $a > 0$)

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

第二换元法

例 10: 求积分

$$\int \sqrt{7+x-x^2} dx \qquad \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx$$

第二换元法：总结

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = G(t) + C = G(\varphi^{-1}(x)) + C$$

- ▶ 核心：选取合适的变量替换
- ▶ 常用场合：根式，三角换元

作业

习题 4.3: 16, 17, 27, 35, 38, 42