4.4 分部积分法

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

26-27 学年第 1 学期

分部积分

求导的乘法法则：

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)$$

两边积分，得到

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

或写成

$$\int udv = uv - \int vdu$$

- 将不定积分 $\int udv$ 转化成 $\int vdu$
- 核心：选取合适的 u 和 v

分部积分

例 1：求积分

$$\int x\cos x dx \qquad \int xe^x dx$$

分部积分

$$\int udv = uv - \int vdu$$

- 经验规律：反对幂三指，前面的优先选为 u
  - 越往前的，求导后化简得更多
  - 越往后的，自身的积分越简单
- 更一般地：求导简单的选为 u，积分简单的选为 v'

分部积分

例 2：求积分

$$\int x^3 \ln x dx \qquad \int \ln x dx$$

分部积分

例 3：求积分

$$\int \arctan x dx \qquad \int x \arctan x dx$$

分部积分

例 4：求积分

$$\int (x^2 + 2x - 1)e^x dx$$

分部积分

例 5：求积分

$$\int x^2 \cos x dx$$

分部积分

例 6：求积分（其中 $a, b > 0$）

$$\int e^{ax} \sin bx dx$$

分部积分

例 7：求积分（其中 $a > 0$）

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

不定积分表（续）

（下表中 $a > 0$）

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C, \qquad \int \cot x dx = \ln|\sin x| + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, \qquad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

并非所有初等函数的原函数都是初等函数：

$$\frac{\sin x}{x}, \quad e^{-x^2}, \quad \sin x^2, \quad \frac{1}{\ln x}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 x}}, \quad \sqrt{1 - k^2\sin^2 x} \quad (0 < k < 1)$$

分部积分

思考题：求积分（其中 $a > 0$）

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$ （n 为正整数）

分部积分：总结

$$\int udv = uv - \int vdu$$

- 核心：选取合适的 u 和 v
- 经验规律：反对幂三指
- 一般规律：通过求导可化简的选为 u
- 有时需要多次分部积分、解方程或迭代

作业

习题 4.4：3，4，6，8，10