4.5 极值问题
4.6 函数的凸凹性与函数作图
4.7 曲线的曲率

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

导数与函数的性质

- 一阶导数：单调性
- 二阶导数：凸凹性

极值

极值问题：寻找一个函数在一定范围内的极值或最值

定义（极值点）：称 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点，如果存在 x_0 的一个邻域 $U_\delta(x_0)$，使得

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall\, x \in U_\delta(x_0) \qquad \text{或} \qquad f(x) \geq f(x_0), \quad \forall\, x \in U_\delta(x_0)$$

- 前者称为极大值点，后者称为极小值点
- 极值点的定义要求双侧，区间端点天然不在考虑范围之内

极值和最值的关系：

- 极值不一定是最值：极值只是函数的局部性质
- 最值不一定是极值：区间端点
- 区间内部的最值一定是极值

极值

定理（费马定理）：设 $f(x)$ 在 (a,b) 上有定义，若 $x_0 \in (a,b)$ 是 $f(x)$ 的极值点，并且 $f(x)$ 在 x_0 处可导，那么 $f'(x_0) = 0$.

- 几何意义：极值点处切线与 x 轴平行

定义（稳定点）：导数等于 0 的点称为稳定点（或驻点、临界点）

- 对于可导函数：极值点一定是稳定点，但稳定点不一定是极值点
- 对于可导函数：极值点从稳定点中找，看其左右函数的单调性
- 要注意函数不可导的点，也有可能是极值点

极值

例：求函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$ **的极值点**

极值

判断稳定点是否为极值点的一个方法：考虑二阶或高阶导数

定理：设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，x_0 是一个稳定点. 若 $f''(x_0) < 0$，则 x_0 为极大值点；若 $f''(x_0) > 0$，则 x_0 为极小值点

定理：设 n 是一个正整数.

1. 设 $f'(x_0) = \cdots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$. 若 $f^{(2n)}(x_0) > 0$, 则 x_0 为极小值点；若 $f^{(2n)}(x_0) < 0$，则 x_0 为极大值点
2. 若 $f'(x_0) = \cdots = f^{(2n)}(x_0) = 0$，且 $f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$，则 x_0 必不是极值点

- 如果 x_0 点处任意阶导数都为 0？

极值

例：求函数 $x^{2/3}$ 和 x^3e^{-x} 的极值点

最值

最值问题：求函数在某个区间上的最大值或/和最小值

极值和最值的关系：

- 极值不一定是最值：极值只是函数的局部性质
- 最值不一定是极值：区间端点
- 区间内部的最值一定是极值
- 区间内部若只有一个极值点，则它必为最值点

最值问题的求解：考虑极值点（从稳定点和不可导点中找）和区间端点

最值

例：求函数 $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值和最小值

凸凹性

凸凹性：函数图像向哪个方向弯曲的性质

我们将按函数不同的光滑性来讨论，且只讨论严格凸凹性

凸凹性：无导数

定义（凸凹性）：设 $f(x)$ 是 (a,b) 上的一个函数. 若对于任意的 $x_1, x_2 \in (a,b)$ 和任意的 $\lambda \in (0,1)$，都有

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) < f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2),$$

则称 $f(x)$ 是一个向上凸（凸）函数. 若不等式符号为 $>$，则称为向下凸（凹）函数.

- 几何意义：两点连线与函数图像的位置关系
- 凸凹性的名字

凸凹性：一阶导数

定义（凸凹性）：设 $f(x)$ 是 (a,b) 上的一个一阶可导函数. 若对于每一点 $x_0 \in (a,b)$，都有

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall\, x \in (a,b), x \neq x_0,$$

则称 $f(x)$ 是一个向上凸（凸）函数. 若不等式符号为 $>$，则称为向下凸（凹）函数.

- 几何意义：函数图像与切线的位置关系
- 思考：两个定义在一阶可导时是否等价？

凸凹性：二阶导数

定理：设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上二阶可导.

1. 若对于任意的 $x\in(a,b)$，都有 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 是向上凸的
2. 若对于任意的 $x\in(a,b)$，都有 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 是向下凸的

- 二阶导数符号仅为凸凹性的充分条件

例：研究函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的凸凹性，其中 $a>0$.

拐点

定义（拐点）：如函数 $f(x)$ 在 c 点两侧附近的凸凹性相反，则称该点为拐点.

定理：设 $f(x)$ 在 (a,b) 上有连续的二阶导数. 若点 $c \in (a,b)$ 为拐点，则 $f''(c) = 0$.

- 逆命题不成立
- 思考：高阶导数和拐点的关系

凸凹性：补充

定理：设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，向下凸. 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上的极小值点（如果存在的话）都是最小值点.

定理（琴生不等式）：设 $f(x)$ 在 (a,b) 内向下凸，则对于任意的 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a,b)$ 和任意满足 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ 的正数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，都有

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

渐近线

定义（$x \to +\infty$ 的渐近线）：设函数 $f(x)$ 定义在区间 $(c, +\infty)$ 上，称 $y = ax + b$ 是 $y = f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 的一条渐近线，如果当 $x \to +\infty$ 时，点 $(x, f(x))$ 与直线 $y = ax + b$ 的距离趋向于 0.

定理：在上面的条件和记号下，渐近线的充要条件是

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$$

- 对 $x \to -\infty$ 也成立
- $a = 0$：水平渐近线；$a \neq 0$：斜渐近线
- 垂直渐近线：当 $x \to c$（或单侧）时，$f(x) \to +\infty$ 或 $f(x) \to -\infty$，则 $x = c$ 是一条垂直渐近线

渐近线

例：求曲线 $y = \frac{x^3+x+1}{(x+1)^2}$ 的渐近线

函数作图

1. 考察连续性、可导性，单独处理间断点和不可导点
2. 单调性：求导数，找出稳定点、单调区间和极值点
3. 凸凹性：求二阶导数，确定凸凹性和拐点
4. 渐近性：考虑有无渐近线

曲率

曲率：函数图形的弯曲程度

$$K = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta\theta|}{|\Delta s|} = \frac{|f''(x_0)|}{(1 + f'(x_0)^2)^{3/2}}$$

- 直线的曲率为 0
- 圆的曲率为半径的倒数 $1/R$

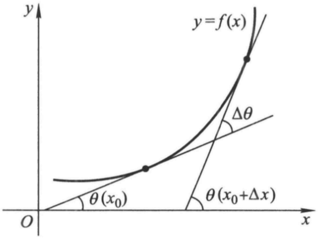

图 4.16

作业

习题 4.5： 1(3), 4

习题 4.6： 1, 2(4)