# 4.5 有理函数的积分

**安冬**

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

*andong@bicmr.pku.edu.cn*

26-27 学年第 1 学期

# 有理函数

形如:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是两个多项式

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$
$$Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m$$

我们将从特殊到一般逐渐介绍:

部分分式 $\longrightarrow$ 不可约真分式 $\longrightarrow$ 一般有理式

# 部分分式

**部分分式：共有以下四类（其中 $n \geq 2$，$p^2 - 4q < 0$）**

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{A}{(x-a)^n},\quad \frac{Bx+D}{x^2+px+q},\quad \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^n}$$

# 部分分式

例 1：求积分

$$\int \frac{A}{x-a}dx$$

# 部分分式

例 2：求积分

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx$$

# 部分分式

例 3：求积分

$$\int \frac{Bx+D}{x^2+px+q}dx$$

# 部分分式

例 4：求积分

$$\int \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^n}dx$$

# 不可约真分式

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是两个多项式，并且

- 分子的次数小于分母
- 分子分母没有公因式

不可约真分式的积分思路：

1. 把分母因式分解
2. 把真分式写成若干个部分分式的和
3. 计算每个部分分式的积分

# 不可约真分式

例 5：求积分

$$\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx$$

# 不可约真分式

例 6：求积分

$$\int \frac{4}{x^3+4x}dx$$

# 不可约真分式的积分思路

1. 分母因式分解：分母写成如下形式（一次多项式与不可分二次多项式的乘积）

$$Q(x) = c_n(x-a_1)^{n_1}\cdots(x-a_k)^{n_k}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_lx+q_l)^{m_l}$$

   - $a_i$ 是不同的实根，$p_i^2 - 4q_i < 0$

2. 把分式写成若干个部分分式的和

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{21}}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{n_1 1}}{(x-a_1)^{n_1}} + \cdots\cdots$$
$$+ \frac{B_{11}x+D_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_{21}x+D_{21}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \cdots + \frac{B_{m_1 1}x+D_{m_1 1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}} + \cdots\cdots$$

   未知系数求解方法：先在左右两边同乘 $Q(x)$，然后两种方法：
   - 比较同次项的系数，让他们相等，解方程（通用方法）
   - 代入特殊值求解（通常更简单）

3. 计算每个部分分式的积分

# 因式分解

例 7：分解因式

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4$$

$$x^3 + x^2 - 3x - 6$$

# 不可约真分式

例 8：求积分

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx$$

# 不可约真分式

例 9：求积分

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 2}{(x^2 + 2)^2} dx$$

# 一般有理式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

思路：先把一般的有理式化为“多项式 + 不可约真分式”

1. 检查 $P(x)$ 的次数是否小于 $Q(x)$ 的次数。若不是，则先把 $P(x)/Q(x)$ 化为“多项式 + 真分式”
   - 方法：凑式法
2. 检查真分式是否有公因子。若有，则约分

# 一般有理式

例 10：求积分

$$\int \frac{x^4 - x^2 + 2x + 3}{x^2 + x - 2} dx$$

# 有理式的不定积分：总结

考虑积分

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

步骤：化为“多项式 + 不可约真分式” → 分母因式分解 → 部分分式分解 → 算积分

# 有理式的不定积分：总结

1. 化为“多项式 + 不可约真分式”
   1. 检查 $P(x)$ 的次数是否小于 $Q(x)$ 的次数。若不是，则先把 $P(x)/Q(x)$ 化为“多项式 + 真分式”
      - 方法：凑式法
   2. 检查真分式是否有公因子。若有，则约分

（以下假设 $P(x)/Q(x)$ 是不可约真分式）

2. 将分母 $Q(x)$ 做因式分解

$$Q(x) = c_n(x-a_1)^{n_1}\cdots(x-a_k)^{n_k}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_lx+q_l)^{m_l}$$

其中 $p_i^2 - 4q_i < 0$

# 有理式的不定积分：一般理论

3. 把分式 $P(x)/Q(x)$ 分解成以下四类部分分式之和

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{A}{(x-a)^n},\quad \frac{Bx+D}{x^2+px+q},\quad \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^n}$$

即（待定系数法）

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = &\frac{A_{11}}{x-a_1}+\frac{A_{21}}{(x-a_1)^2}+\cdots+\frac{A_{n_1 1}}{(x-a_1)^{n_1}}+\cdots\cdots\\ &+\frac{B_{11}x+D_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{B_{21}x+D_{21}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\cdots+\frac{B_{m_1 1}x+D_{m_1 1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}}+\cdots\cdots\end{aligned}$$

未知系数求解方法：先在左右两边同乘 $Q(x)$，然后两种方法：

- 比较同次项的系数，让他们相等，解方程（通用方法）
- 代入特殊值求解（通常更简单）

# 有理式的不定积分：一般理论

4. 计算每一个部分分式的不定积分

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{A}{(x-a)^n},\quad \frac{Bx+D}{x^2+px+q},\quad \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^n}$$

# 有理式的不定积分：一般理论

例 11：求积分

$$\int \frac{3x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x - 6} dx$$

# 作业

**习题** 4.5：3，7，9，17，19