4.6 三角函数有理式的积分

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

26-27 学年第 1 学期

三角函数有理式

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

其中 $R(y, z)$ 是一个二元有理式

- 不含根式
- 不含其它函数
- 三角函数的自变量必须相同（若不同，先考虑能否恒等变形化为相同的）

例子：

- 正例：

$$\frac{\cos^2 x + \sin^5 x}{2\sin x}, \quad \frac{\tan x}{\sin x + \sec^2 x}$$

- 反例：

$$\sqrt{1+\sin^2 x}, \quad x\sin x, \quad \sin(x^2) + \cos x, \quad \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \sin x$$

万能替换

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

1. **万能替换**:

$$t = \tan\frac{x}{2}, \quad x = 2\arctan t$$

2. **应用万能公式和微分关系**

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$\Longrightarrow \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

3. **计算有理式的积分**

万能替换

例 1: 求积分

$$\int \frac{\cot x}{\sin x + \cos x - 1} dx$$

万能替换

例 2: 求积分

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

其他方法

方法 1：若 $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$，可作变换 $t = \tan x$

例 3: 求积分

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

其他方法

方法 2：形如 $\sin(ax)\sin(bx)$, $\cos(ax)\cos(bx)$, $\sin(ax)\cos(bx)$ 的积分，用积化和差

例 4: 求积分

$$\int \sin(ax)\sin(bx)dx$$

其他方法

方法 3：形如 $\cos^n x \sin^m x$ 的积分（m, n 为正整数）：

- n 为奇数：$t = \sin x$
- m 为奇数：$t = \cos x$
- n, m 都为偶数：二倍角公式

其他方法

例 5: 求积分（m, n 均为正整数，j, k 为非负整数）

$$\int \cos^{2k+1} x \sin^m x \, dx, \qquad \int \cos^n x \sin^{2j+1} x \, dx, \qquad \int \cos^{2k} x \sin^{2j} x \, dx$$

作业

习题 4.6：4, 7, 10, 11, 12