4.7 几种简单的代数无理式的积分

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

26-27 学年第 1 学期

某些代数无理式的积分

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

其中 $R(y,z)$ 是一个二元有理式

步骤：

1. 变量替换：

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}, \quad dx = \left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}\right)' dt$$

2. 计算有理式的积分

某些代数无理式的积分

例 1: 求积分

$$\int \frac{1}{3x+\sqrt[3]{3x+2}}dx$$

某些代数无理式的积分

例 2: 求积分

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}dx$$

某些代数无理式的积分

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

常用技巧：

- 配方
- 凑微分后用第一换元法

某些代数无理式的积分

例 3: 求积分

$$\int \sqrt{3-4x-x^2}dx, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{3+x+x^2}}$$

某些代数无理式的积分

例 4: 求积分

$$\int \frac{3x-2}{\sqrt{3+x+x^2}}dx$$

某些代数无理式的积分

例 5: 求积分

$$\int \frac{x^2+3x-2}{\sqrt{3+x+x^2}}dx$$

作业

习题 4.7：2, 3, 5, 7