5.1 向量代数
5.2 向量的空间坐标

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

向量

定义（向量）：既有大小又有方向的量

- 本课程中我们只讨论自由向量
- 记号：$\vec{AB}$, $\mathbf{a}$, $\vec{a}$

几个概念：

- 模：向量的长度/大小，记作 $|\mathbf{a}|$
- 共线：平行的两个向量
- 反向量：大小相同方向相反的向量，记作 $-\mathbf{a}$
- 单位向量：模为 1 的向量，记作 $\mathbf{a}^0$
- 零向量：模为 0 的向量（可以以任何方向作为其方向），记作 $\mathbf{0}$

向量的加减法

向量加法：平行四边形或三角形法则，记作 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$

向量减法：$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$

性质：

- 交换律：$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$
- 结合律：$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$
- 三角不等式：$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\leq|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$

数乘向量

数乘运算：一个向量 $\mathbf{a}$ 和一个实数 λ，定义 $\lambda\mathbf{a}$ 是一个这样的向量：

- 模：$|\lambda||\mathbf{a}|$
- 方向：当 $\lambda > 0$ 时与 $\mathbf{a}$ 一致，当 $\lambda < 0$ 时与 $\mathbf{a}$ 相反

性质：

- $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$
- $(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$
- $(\lambda+\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$
- 若存在一个实数 λ，使得 $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ 或 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$，则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线

向量的内积

定义（夹角）：两个非零向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 所夹的 $[0,\pi]$ 范围内的角，记作 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$

定义（内积/点乘/数量积）：两个向量的内积是如下的一个实数：

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$

内积与向量夹角的关系：

$$\cos\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}, \qquad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \arccos\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}\right)$$

- 内积正负性对应着夹角是锐角、直角还是钝角
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 垂直

向量的内积

性质:

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$
- 交换律: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- 与数乘的结合律: $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- 分配律: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$
- 柯西施瓦兹不等式: $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$

向量的外积

定义（外积/叉乘）：两个向量的外积记作 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$，是如下的一个向量

- 模：$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$（于是两个共线向量的外积是零向量 $\mathbf{0}$）
- 方向：垂直于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 决定的平面，方向由右手法则决定

几何意义：$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ 是以 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 为邻边的平行四边形的面积

性质：

- 反交换律：$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$
- 与数乘的结合律：$\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b})$
- 分配律：$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
- 不满足交换律，不满足结合律
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线

向量的混合积

定义（混合积）：三个向量的混合积是一个数

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

- 几何意义：混合积的绝对值等于由 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 所形成的平行六面体的体积

性质：

- 循环不变性：$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
- $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面

空间直角坐标系

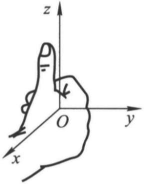

图 5.6

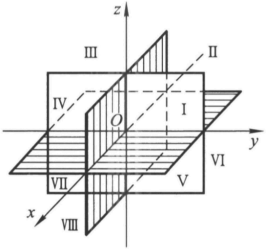

图 5.7

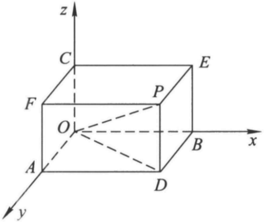

图 5.8

$\mathbb{R}=\{$全体实数$\}$(数轴)， $\mathbb{R}^2=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R}\}$(平面直角坐标系)，

$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)|x,y,z\in\mathbb{R}\}$(空间直角坐标系)

可推广到任意的 $\mathbb{R}^n$

向量的坐标

向量和点一一对应：$P \leftrightarrow \vec{OP}$

- 点 P 的坐标 (x, y, z) 也作为向量 $\vec{OP}$ 的坐标

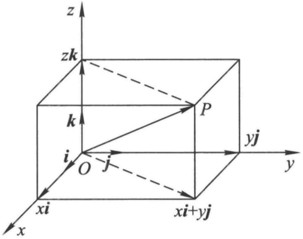

图 5.9

坐标向量：

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0)$$
$$\mathbf{j} = (0, 1, 0)$$
$$\mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

关于坐标向量的分解式：

$$\mathbf{a} = (x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

向量运算的坐标表示

设向量 $\mathbf{a}=(x,y,z)$，$\mathbf{a}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\mathbf{a}_2=(x_2,y_2,z_2)$，实数 λ

- 模：
$$|\mathbf{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
- 单位向量：
$$\mathbf{a}^0=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)$$
- 加法：
$$\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$$
- 数乘：
$$\lambda\mathbf{a}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$$
- 内积：
$$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

向量的坐标运算

二阶行列式:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= x_1 y_2 z_3 + y_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 y_3 - z_1 y_2 x_3 - z_2 y_3 x_1 - z_3 y_1 x_2$$

向量的坐标运算

坐标向量的外积:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\quad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$$

向量的外积: $\mathbf{a}_1=(x_1,y_1,z_1),\mathbf{a}_2=(x_2,y_2,z_2)$

$$\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2=(y_1z_2-z_1y_2)\mathbf{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\mathbf{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\mathbf{k}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$$

向量的混合积: $\mathbf{a}_1=(x_1,y_1,z_1),\mathbf{a}_2=(x_2,y_2,z_2),\mathbf{a}_3=(x_3,y_3,z_3)$

$$\mathbf{a}_3\cdot(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)=(y_1z_2-z_1y_2)x_3+(z_1x_2-x_1z_2)y_3+(x_1y_2-y_1x_2)z_3=\begin{vmatrix}x_3&y_3&z_3\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$$

向量的坐标运算

例 1：点 $A(1,0,1), B(0,1,1), C(1,-1,1)$，求 $\vec{AB}$ 和 $\vec{AC}$ 之间的夹角

例 2：判断 $\mathbf{a}=(5,6,0)$ 和 $\mathbf{b}=(1,2,3)$ 是否共线

例 3：判断 $\mathbf{a}=(3,0,5), \mathbf{b}=(1,2,3), \mathbf{c}=(5,4,11)$ 是否共面

方向角与方向余弦

方向角：非零向量 $\mathbf{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角，分别记为 α, β, γ

方向余弦：方向角的余弦值，$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$

- 内积表示：

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{a}|}$$

- 坐标表示：

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

性质：

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \quad \mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \cos\alpha\ \mathbf{i} + \cos\beta\ \mathbf{j} + \cos\gamma\ \mathbf{k}$$

作业

习题 5.1： 5, 10

习题 5.2： 4, 9, 16