5.1 定积分的概念

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

26-27 学年第 1 学期

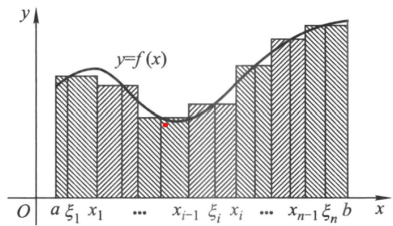
定积分

来源：曲边梯形的面积，考虑连续正函数 $y = f(x)$ 与 $y = 0$, $x = a$ 和 $x = b$ 围成的曲边梯形的面积

1. 分割：$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$
2. 近似：在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上，每个小曲边梯形面积 $\approx f(\xi_k)\Delta x_k$
   - $\xi_k : [x_{k-1}, x_k]$ 中的任意一点
   - $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$
3. 求和：总面积 $S \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$
4. 取极限：分割越细，近似越准

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

   - $\lambda = \max\{\Delta x_k\}$



定积分

来源：质点的运动路程，考虑做直线运动的质点，在某段时间 $[a, b]$ 内任一时刻 t 的速度是 $v(t) \geq 0$

1. 分割：$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$
2. 近似：在 $[t_{k-1}, t_k]$ 上，近似走过 $v(\tau_k)\Delta t_k$
   - $\tau_k : [t_{k-1}, t_k]$ 中的任意一点
   - $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$
3. 求和：总路程 $S \approx \sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\Delta t_k$
4. 取极限：分割越细，近似越准

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\Delta t_k$$

   - $\lambda = \max\{\Delta t_k\}$

定义

分割：在区间 $[a,b]$ 上取 $n+1$ 个点 x_k $(k=0,1,\cdots,n)$，满足 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 称为 $[a,b]$ 的一种分割.

- $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $\lambda=\max_k\{\Delta x_k\}$（称为分割的最大区间长）

定积分：若对于任意分割和任意中间点 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$，当最大区间长 $\lambda\to 0$ 时，极限 $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ 都存在且相等，则称这个极限值为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，记为

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$$

- $f(x)$：被积函数. a,b：积分下/上限. $[a,b]$：积分区间. x：积分变量
- $\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ 称为黎曼和
- 此积分也叫黎曼积分，函数称为黎曼可积

定义

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k = I$$

$\epsilon - \delta$ 语言：对于任意的 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得对于任意分割以及任意的中间点 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$，只要 $\lambda < \delta$，都有

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k - I \right| < \epsilon$$

- 仅要求 $n \to \infty$ 不充分：无法保证分割变细
- 仅考虑均匀分割下的某一种取点方式也不充分（但是是必要条件）

几何含义

$$\int_a^b f(x)dx$$

几何含义：函数图像 $y = f(x)$ 与 $x = a, x = b$ 和 x 轴围成的有向面积

可积函数

并非所有函数都可积

命题：可积一定有界，但有界不一定可积

- 反例：狄利克雷 (Dirichlet) 函数

可积函数

对于闭区间 $[a, b]$ 上的函数：

- 连续一定可积
- 有有限个间断点的有界函数一定可积
- 单调有界一定可积

对于已经保证可积的函数，可以取特殊的分割/中间点来方便计算

可积函数

例：求积分

$$\int_0^1 e^x dx$$

作业

习题 5.1：2