5.2 定积分的基本性质

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

26-27 学年第 1 学期

定积分的定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

- 任意分割 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\lambda = \max \Delta x_k$
- $f(x)$: 被积函数. a, b: 积分下/上限. $[a, b]$: 积分区间. x: 积分变量
- 几何含义: 有向面积

性质

- 积分下限不小于积分上限时的约定：
  - 当 $a = b$ 时，
  $$\int_a^b f(x)dx = 0$$
  - 当 $a > b$ 时，
  $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
- 与被积变量记号无关：
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

性质

- **线性性**：若 $f(x), g(x)$ 可积，则 $f(x) \pm g(x)$ 和 $cf(x)$ 都可积，且

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx, \quad \int_a^b (cf(x))dx = c\int_a^b f(x)dx$$

- **区间可分割**：

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

  - 对于任意 a, b, c 的大小关系都成立

性质

- **保号性**：若 $f(x) \geq 0$，$a \leq b$，则

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

- **保序性**：若 $f(x) \leq g(x)$，$a \leq b$，则

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

- **积分不等式**：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $m \leq f(x) \leq M$，则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

性质

- **绝对值不等式**：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

  - **注**：若 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可积，无法推出 $f(x)$ 也可积

性质

- 积分中值定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则必存在一点 $c \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

  - 几何意义：曲边梯形的面积一定可以等于某个矩形的面积
  - 还可以写成：连续函数的积分平均值必等于某点处的函数值

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

  - 闭区间上积分值为 0 的连续函数至少有一根

性质

- 有限个点不影响积分：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，又设 $g(x)$ 仅在有限个点处和 $f(x)$ 不同，则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

作业

习题 5.2：4, 5, 6