

5.4 二次曲面

安冬

北京大学北京国际数学研究中心 (BICMR)

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

二次曲面

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0$$
$$(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

椭圆锥面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

- 与平面 $z = z_0$ 的截痕是一个椭圆周

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2} \\ z = z_0 \end{cases}$$

- 半轴与 $|z_0|$ 成正比
- 与 Oyz 和 Ozx 平面的截痕都是两条直线
- 若点 (x_0, y_0, z_0) 在该曲面上, 则由原点与点 (x_0, y_0, z_0) 决定的直线都在该曲面上

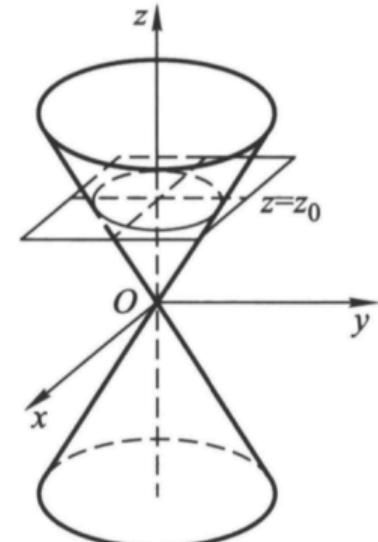


图 5.16

椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- ▶ 与平行于坐标平面的平面相截，截痕都是椭圆周
- ▶ 参数方程： $\varphi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi)$

$$\begin{cases} x = a \sin \varphi \cos \theta \\ y = b \sin \varphi \sin \theta \\ z = c \cos \varphi \end{cases}$$

- ▶ 当 $a = b = c$ 时，退化成球面

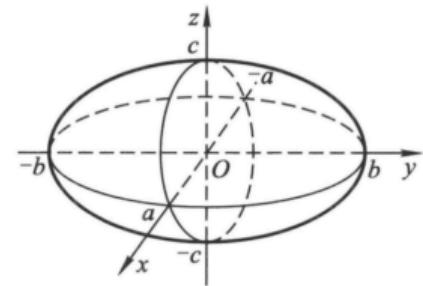


图 5.17

单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- ▶ 与平面 $z = z_0$ 的截痕是一个椭圆周

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z_0^2}{c^2} \\ z = z_0 \end{cases}$$

- ▶ 半轴随 $|z_0|$ 增大而增大
- ▶ 与平面 $x = x_0$ 或 $y = y_0$ 的截痕是双曲线（或退化成两条直线）

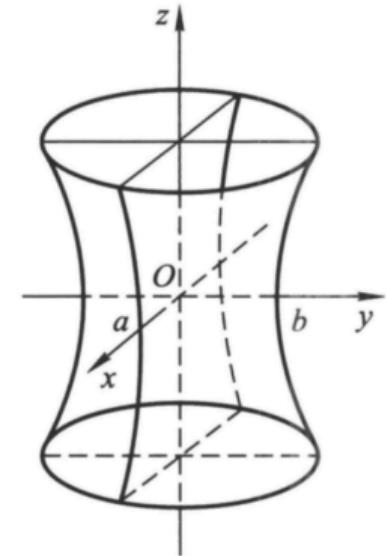


图 5.18

双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

- ▶ 与平面 $z = z_0$ ($|z_0| > c$) 的截痕是一个椭圆周
 - ▶ 半轴随 $|z_0|$ 增大而增大
- ▶ 与平面 $x = x_0$ 或 $y = y_0$ 的截痕是双曲线

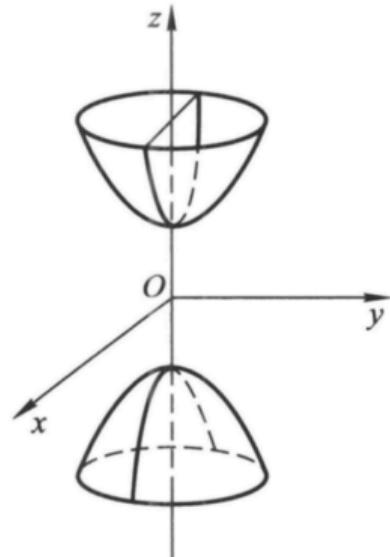


图 5.19

椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- ▶ 由 Oxy 平面上的一个椭圆周沿 z 轴平移得来
- ▶ 与 z 轴平行的直线（称为母线）沿一个 Oxy 平面上的椭圆周（称为准线）平移得来

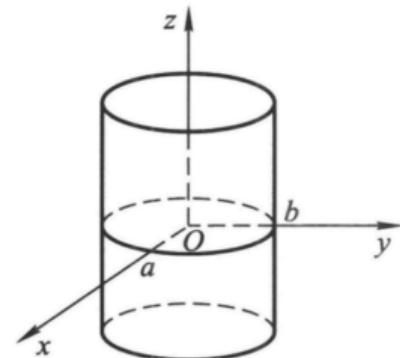


图 5.20

双曲柱面

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- ▶ 母线：平行于 z 轴
- ▶ 准线： Oxy 平面上的双曲线

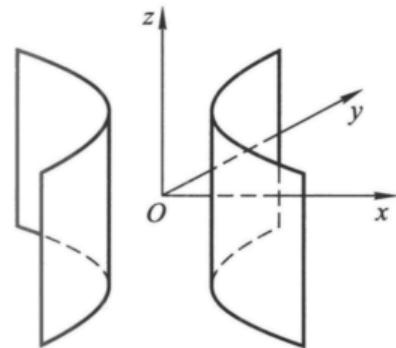


图 5.21

抛物柱面

$$\frac{x^2}{a^2} - y = 0$$

- ▶ 母线：平行于 z 轴
- ▶ 准线： Oxy 平面上的抛物线

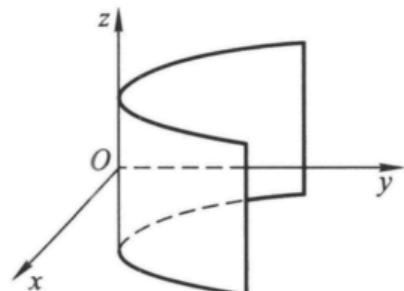


图 5.24

椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

- ▶ 与平面 $z = z_0$ ($z_0 > 0$) 的截痕是一个椭圆周
- ▶ 与平面 $x = x_0$ 或 $y = y_0$ 的截痕是抛物线

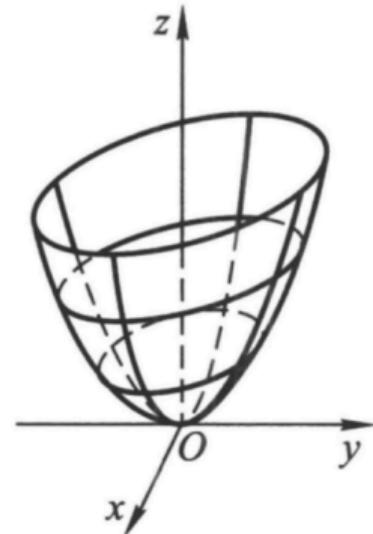


图 5.22

双曲抛物面

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

- ▶ 与平面 $z = z_0$ 的截痕是双曲线
 - ▶ $z_0 > 0$ 时, 以 x 轴为实轴
 - ▶ $z_0 < 0$ 时, 以 y 轴为实轴
 - ▶ $z_0 = 0$ 时, 两条直线
- ▶ 与平面 $x = x_0$ 或 $y = y_0$ 的截痕是抛物线
 - ▶ $x = x_0$, 开口向下
 - ▶ $y = y_0$, 开口向上
- ▶ 也被称为马鞍面

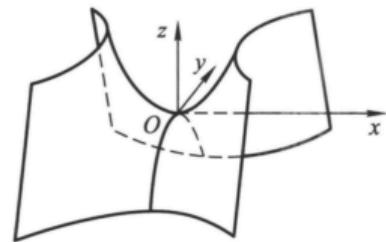


图 5.23

二次曲面

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0$$
$$(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

一般的二次曲面：

- ▶ 代数手段：可通过坐标变换，化为之前 9 种之一
- ▶ 几何手段：研究截面上的截痕

作业

习题 5.4: 3(4)(5)