5.5 空间曲线的切线与弧长

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

空间曲线

定义（空间曲线）：区间 $[a,b]$ 到空间 $\mathbb{R}^3$ 的一个连续映射的像

$$\gamma:[a,b]\mapsto\mathbb{R}^3,\quad t\mapsto(x(t),y(t),z(t))$$

- $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$ 称为曲线的参数方程，t 为参数
- 也可记为向量值函数 $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$
- 光滑曲线：$x(t),y(t),z(t)$ 有连续的导数，且不同时为 0

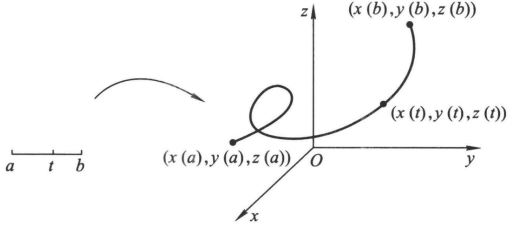

图 5.25

空间曲线的切线

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

切线的方向（切向量）：

$$\mathbf{r}\,'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = (x\,'(t), y\,'(t), z\,'(t))$$

切线方程：在 $\mathbf{r}(t_0)$ 点处，

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + s\,\mathbf{r}\,'(t_0), \qquad s \in (-\infty, +\infty)$$

$$\begin{cases} x = x(t_0) + s\,x\,'(t_0) \\ y = y(t_0) + s\,y\,'(t_0) \\ z = z(t_0) + s\,z\,'(t_0) \end{cases} \qquad \frac{x - x(t_0)}{x\,'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y\,'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z\,'(t_0)}$$

空间曲线的法平面

定义（法平面）：过点 $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ 且与该点处的切向量垂直的平面

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0$$

空间曲线的弧长

考虑划分 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$，$\lambda = \max_i |t_i - t_{i-1}|$，定义弧长为

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})|$$

$$s = \int_a^b |\mathbf{r}\,'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x\,'(t)^2 + y\,'(t)^2 + z\,'(t)^2} dt$$

弧微分：

$$ds = \sqrt{x\,'(t)^2 + y\,'(t)^2 + z\,'(t)^2} dt$$

空间曲线

例：考虑曲线

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$$

求它在 $(0, a, b\pi/2)$ 处的切线方程和法平面方程，以及它在 $t \in [0, \pi]$ 段的长度

作业

习题 5.5：2, 3, 4