6.2 多元函数的极限

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

极限的定义

一元函数的极限：$y = f(x)$

- 直观：当点 x 任意接近于 x_0 时，函数值 $f(x)$ 所趋向的值
- 定义：$\forall\ \epsilon > 0$，$\exists\ \delta > 0$，使得对于任意的 $0 < |x - x_0| < \delta$，都有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

多元函数的极限：

- 同样的直观
- 不同点：自变量趋向于某点的自由度更高

极限的定义

定义（极限）：设 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某个空心邻域内有定义. 若存在一个常数 A，对于任意的 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得对于任意的满足

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

的点 (x, y)，都有

$$|f(x, y) - A| < \epsilon.$$

则称当 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时，$f(x, y)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A, \qquad \lim_{x\to x_0,\ y\to y_0} f(x, y) = A$$

- 不用关心较大的 δ
- $f(x, y)$ 的极限与 $f(x_0, y_0)$ 无关
- 极限若存在，则必定唯一
- 注意记号：$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0}$ 指的不是多元极限

极限的定义

例：求 $\lim_{x\to 0,\ y\to 0} f(x,y)$，其中

$$f(x,y)=\frac{x\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

极限的定义

定义 1：$\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$, 使得对于任意的 $0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$，都有 $|f(x,y)-A| < \epsilon$

定义 2：$\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$, 使得对于任意的 $|x-x_0| < \delta, |y-y_0| < \delta$ 且 $(x,y) \neq (x_0, y_0)$，都有 $|f(x,y)-A| < \epsilon$

- 定义 1 与定义 2 等价

极限的定义

定义 3： $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$, 使得对于任意的 $0 < d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta$， 都有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$

- 极限的定义与衡量 (x, y) 与 (x_0, y_0) 距离的函数 d 无关

定义 4： $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$, 使得

$$f(U_\delta((x_0, y_0)) \setminus \{(x_0, y_0)\}) \subset U_\epsilon(A)$$

极限的定义

例：求 $\lim_{(x,y)\to(3,0)} f(x,y)$，其中

$$f(x,y) = x^2 + \sin y$$

极限的定义

二元函数极限与一元函数极限的区别：自变量趋向于某点的方式自由度更高

- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$：无论 (x,y) 沿什么路径趋向于 (x_0,y_0)，$f(x,y)$ 都要趋向于 A
- 证明二元函数极限不存在的常用方法：
  - 找到两条不同的通往 (x_0,y_0) 的路径，使得当 (x,y) 沿这两条路径趋向于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 趋向于不同的数
  - 找到一条通往 (x_0,y_0) 的路径，使得当 (x,y) 沿这条路径趋向于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 没有极限

例：

$$f(x,y) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad f(x,y) = \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}, \qquad (x,y)\to(0,0)$$

极限的定义

f 是区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射.

$$\lim_{P \to P_0} f(P_0) = A$$

定义（映射的极限）: $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0,$ 使得对于任意的 $0 < d(P, P_0) < \delta$，都有 $d(f(P), A) < \epsilon$

定义'（映射的极限）: $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0,$ 使得

$$f(U_\delta(P_0) \backslash \{P_0\}) \subset U_\epsilon(A)$$

极限的性质

四则运算：设

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = B$$

1. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) \pm g(x,y)) = A \pm B$$
2. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (cf(x,y)) = cA$$
3. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y)g(x,y)) = AB$$
4. 若 $B \neq 0$，则
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{A}{B}$$

极限的性质

保序性：设

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = B$$

1. 如果 $f(x,y) \geq g(x,y)$，则 $A \geq B$
2. 如果 $A > B$，则存在去心邻域 $U_\delta((x_0,y_0))\setminus\{(x_0,y_0)\}$，使得在这个去心邻域上有 $f(x,y) > g(x,y)$

极限的性质

夹逼定理：设三个函数在某空心邻域上满足

$$h(x,y) \leq f(x,y) \leq g(x,y).$$

如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = A,$$

则

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$$

- 常用推论：
  1. 非负函数满足 $f(x,y) \leq g(x,y)$，且 $g(x,y) \to 0$，则 $f(x,y) \to 0$
  2. 若 $|f(x,y)| \to 0$，则 $f(x,y) \to 0$
  3. 若 $f(x,y) \to 0$，$g(x,y)$ 有界，则 $f(x,y)g(x,y) \to 0$

极限的性质

例: 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{2x^2+y}{xy}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^4)}{x^2+y^2}$$

复合函数的极限

一元函数： $u = g(x)$， $y = f(u)$

$$x \mapsto g(x) \mapsto f(g(x))$$

- 结论：若

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = u_0, \quad \lim_{u \to u_0} f(u) = L,$$

则

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = L$$

二元函数：三种情况

$$t \mapsto (x(t), y(t)) \mapsto f(x(t), y(t))$$
$$(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v)) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$$
$$(x, y) \mapsto g(x, y) \mapsto f(g(x, y))$$

复合函数的极限

1. 情形 1，$t \mapsto (x(t), y(t)) \mapsto f(x(t), y(t))$：

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t\to t_0} y(t) = y_0, \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$
$$\Longrightarrow \lim_{t\to t_0} f(x(t), y(t)) = L$$

2. 情形 2，$(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v)) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$：

$$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} x(u,v) = x_0, \quad \lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} y(u,v) = y_0, \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$
$$\Longrightarrow \lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} f(x(u,v), y(u,v)) = L$$

3. 情形 3，$(x, y) \mapsto g(x, y) \mapsto f(g(x, y))$：

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = u_0, \quad \lim_{u\to u_0} f(u) = L$$
$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(g(x,y)) = L$$

复合函数的极限

例：求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}, \qquad \lim_{(u,v)\to(0,0)}\left(\frac{\sin(2(u^2+v^2))}{u^2+v^2}\right)^{\frac{u\sin v}{\sqrt{u^2+v^2}}}$$

累次极限和全面极限

全面极限：前面定义的二元函数的极限

累次极限：固定其他自变量，依次考虑对应一元函数的极限

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y), \qquad \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

累次极限和全面极限

累次极限和全面极限没有什么必然联系

- 全面极限存在并不意味着累次极限存在

$$f(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad f(0,y) = 0$$

- 累次极限都存在并不一定相等

$$f(x,y) = \frac{y^3 + \sin x^2}{x^2 + y^2}$$

- 累次极限存在且相等并不意味着全面极限存在

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

作业

习题 6.2： 2(1), 3