6.4 偏导数与全微分

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

一阶偏导数

一元函数的导数：函数值随自变量的变化率

多元函数的偏导数：函数值随某一个自变量的变化率（固定其他自变量）

二元函数 $z = f(x, y)$

- 当自变量 y 固定时，$z = f(x, y)$ 就是关于 x 的一个一元函数（$x \mapsto f(x, y)$），该一元函数的导数称为 $z = f(x, y)$ 关于 x 的偏导数
- 当自变量 x 固定时，$z = f(x, y)$ 就是关于 y 的一个一元函数（$y \mapsto f(x, y)$），该一元函数的导数称为 $z = f(x, y)$ 关于 y 的偏导数

一阶偏导数

定义（一阶偏导数）：二元函数 $f(x,y)$，对于点 (x_0,y_0)，若极限

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称之为 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数（偏微商）

- 记号：

$$f_x(x_0,y_0),\quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\quad z_x|_{(x_0,y_0)}$$

- 可类似定义关于 y 的偏导数
- 几何含义：曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $y=y_0$ 或 $x=x_0$ 截线的切线斜率
- 考虑函数 $f(x,y)$ 在任意点 (x,y) 处的偏导数，它们也是 x,y 的二元函数，称为偏导函数，简称偏导数

$$f_x(x,y),\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad f_y(x,y),\quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

一阶偏导数

计算偏导数，就是计算一个带着其他字母常数的一元函数导数

一阶偏导数

例 1：求 $\partial f/\partial x$ 和 $\partial f/\partial y$

$$f(x,y)=x^2+y^2+xy+e^x\cos y,\qquad f(x,y)=x^y\ (x,y>0)$$

一阶偏导数

例 2：求 $\partial f/\partial x$ 和 $\partial f/\partial y$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

一阶偏导数

例 3：求 $\partial u/\partial x$，$\partial u/\partial y$ 和 $\partial u/\partial z$

$$u = (x^2 + y^2)z^2 + \sin x^2$$

一阶偏导数

例 4： 求 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,0)}$

$$z = \arctan \frac{(x-2)y + y^2}{xy + (x-2)^2 y^3}$$

一阶偏导数

一元函数：可导 $\Rightarrow$ 连续

多元函数：可偏导 $\not\Rightarrow$ 连续

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f(x,y)=\mathrm{sgn}(xy)$$

高阶偏导数

二阶偏导数：偏导数的偏导数，共有四个（其中 2、3 称为混合偏导数）

1. 先对 x 再对 x：
$$f_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad z_{xx}$$
2. 先对 x 再对 y：
$$f_{xy}(x,y),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\quad z_{xy}$$
3. 先对 y 再对 x：
$$f_{yx}(x,y),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},\quad z_{yx}$$
4. 先对 y 再对 y：
$$f_{yy}(x,y),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\quad z_{yy}$$

高阶偏导数

三阶偏导数：二阶偏导数的偏导数

- 例：f_{xxx}，$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}$，$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z}$

可类似定义 n 阶偏导数

记号：对于区域 D，

$C^n(D) = \{f(x,y) : f(x,y)$定义在$D$上，有 n 阶偏导数，且每个 n 阶偏导数都在 D 内连续$\}$

高阶偏导数

例 5： **求二阶偏导数**

$$z = ye^{xy}$$

高阶偏导数

定理：若 $f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 f_{xy} 和 f_{yx} 在 D 内连续，则

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$$

高阶偏导数

例 6：设 $f(x, y, z, w) = ze^{w^2+x^2+y^2}$ 求

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial w}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$$

高阶偏导数

例 7：证明函数 $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ 满足平面拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

高阶偏导数

偏微分方程：含有未知函数偏导数的方程

例子：

- 拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2}=0$$

- 热方程

$$\frac{\partial f(t,x,y)}{\partial t}=\frac{\partial^2 f(t,x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(t,x,y)}{\partial y^2}$$

- 波动方程

$$\frac{\partial^2 f(t,x,y)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 f(t,x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(t,x,y)}{\partial y^2}$$

高阶偏导数

算子：函数到函数的映射

例子：

- 求偏导这一运算可看作一个算子，称为微分算子

$$\frac{\partial}{\partial x}: \ f(x,y) \mapsto f_x(x,y), \quad f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \circ \frac{\partial}{\partial x}: \ f \mapsto \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

- 拉普拉斯算子：

二维：$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ 三维：$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$

全微分

一元函数 $y = f(x)$ 的微分：$dy = Adx$，$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$，函数增长的线性主要部分

多元函数的全微分：函数增长关于所有自变量增量的线性主要部分

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx A\Delta x + B\Delta y$$

全微分

定义（全微分）：若函数 $z=f(x,y)$ 的增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 可写成

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)\qquad(\rho\to 0)$$

1. A,B 与 $\Delta x,\Delta y$ 无关（可能与 (x_0,y_0) 有关）
2. $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，并称全微分为

$$dz=A\Delta x+B\Delta y$$

- 区域内可微：区域内的每一点都可微

全微分

$$dz = A\Delta x + B\Delta y$$

定理：可微 $\Longrightarrow$ 连续

定理：可微 $\Longrightarrow$ 偏导数存在，且

$$A = f_x(x_0, y_0), \qquad B = f_y(x_0, y_0)$$

- 对于自变量 x, y，$\Delta x = dx, \Delta y = dy$
- 全微分公式：

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy, \qquad df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

- 可推广到多元函数：例如三元函数

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

全微分

偏导数存在 $\not\Rightarrow$ 可微（注意这里与一元函数不同）

定理：偏导数存在且连续 $\Rightarrow$ 可微

- 多元初等函数，只要偏导数存在就一定可微

全微分

例 8：设 $z = x^y\ (x, y > 0)$，求 dz

全微分

例 9：求 $z = f(x, y)$ 的表达式，满足

$$dz = (6xy - y^2)dx + (3x^2 - 2xy)dy$$

作业

习题 6.4： 2(1), 7, 10(3), 12, 16, 17