# 6.5 复合函数微分法<br>一阶全微分的形式不变性与高阶微分

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

*andong@bicmr.pku.edu.cn*

25-26 学年第 1 学期

# 复合函数微分法

一元函数链式法则：$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

多元函数：考虑复合函数 $z = f(u(x,y), v(x,y))$， $(x,y) \mapsto (u,v) \mapsto z$

定理：设 $u(x,y), v(x,y)$ 偏导数存在，$z = f(x,y)$ 偏导数存在且连续，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

# 复合函数微分法

例 1： 求函数的偏导数

$$z = e^{xy}\sin(x+y), \qquad z = \frac{y}{x}\ln(x^2+y^2)$$

# 复合函数微分法

例 2：设函数 $z=f(x,y)$ 有连续的一阶偏导数，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，求 $\partial z/\partial r$ 和 $\partial z/\partial\theta$，并证明

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

# 复合函数微分法

复合函数微分法一般规律：$\sum_{\text{所有中间变量}}$ 外函数的偏导 $\times$ 对应内函数的偏导

例子：

$$z = f(u(x), v(x))$$

$$z = f(u(x,y), v(x,y), w(x,y))$$

一般情况：$z = f(u_1(x_1, \cdots, x_n), u_2(x_1, \cdots, x_n), \cdots, u_m(x_1, \cdots, x_n))$

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

一个特殊情况：$z = f(x, y, w(x,y))$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}$$

# 复合函数微分法

例 3：设 $u(x), v(x)$ 可微且大于 $0$，求

$$\frac{d}{dx}u(x)^{v(x)}$$

# 复合函数微分法

例 4：设 $z = f(u, v, w)$，$u = e^x$，$v = xy$，$w = y\sin x$，求

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}$$

# 复合函数微分法

例 5： 求 $z = f(x, y, x^2 y)$ 的偏导数

# 一阶全微分的形式不变性

定理：

1. 当 $(u, v)$ 是自变量时，函数 $z = f(u, v)$ 的全微分为
$$dz = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$
2. 当 $(x, y)$ 是自变量时，复合函数 $z = f(u(x, y), v(x, y))$ 的全微分仍为
$$dz = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

- 无论 $u, v$ 是自变量还是中间变量，一阶全微分的形式都不变
- 高阶微分没有形式不变性

# 一阶全微分的形式不变性

一阶全微分的运算法则:

$$
\begin{aligned}
d(u \pm v) &= du \pm dv \\
d(cu) &= cdu \\
d(uv) &= vdu + udv \\
d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{vdu - udv}{v^2} \\
d(f(u)) &= f'(u)du
\end{aligned}
$$

# 一阶全微分的形式不变性

例 6：$z = \sin(x^2 + y^2) + e^{xz}$，求点 $(1, 0, 1)$ 处的全微分 $dz$

# 高阶微分

$$z = f(x, y), \quad df = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

二阶微分：将 $df$ 视为 $(x, y)$ 的函数，再求微分，记为 $d^2 f$

$$\begin{aligned} d^2 f = d(df) &= \frac{\partial}{\partial x}(f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy)dy \\ &= f_{xx}(x, y)dx^2 + f_{yx}(x, y)dydx + f_{xy}(x, y)dxdy + f_{yy}dy^2 \end{aligned}$$

若 $f \in C^2$，则

$$d^2 f = f_{xx}(x, y)dx^2 + 2f_{xy}(x, y)dxdy + f_{yy}dy^2$$

$n$ 阶微分：$d^n f = d(d^{n-1} f)$

# 高阶微分

例 7：设 $f \in C^3$，求 $d^3 f$

# 高阶微分

$$df = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right) f$$

$$d^{\,2}f = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f$$

$$d^{\,3}f = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f$$

$$d^{\,n}f = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f$$

- 算子 $(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y})^n$ 可以按一般的四则运算展开（无交换律）
- 当 $f \in C^n$，算子 $(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y})^n$ 可按二项式定理展开

$$d^{\,n}f = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} dx^k dy^{n-k}\frac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^{n-k}}\right) f = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} dx^k dy^{n-k}$$

# 高阶微分

例 8：设 $f(x, y) = e^x y^2$，求 $d^3 f$

# 高阶微分

多元函数的高阶微分结论类似

三元函数：$f(x, y, z)$

$$d^{\,2} f = \left( dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f$$

$$d^{\,n} f = \left( dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z} \right)^n f$$

# 高阶微分

例 9：设 $f(x, y, z) = xy^2 + z^3 - xyz$，求 $d^2 f$

# 作业

**习题** 6.5： 2, 5, 8, 9, 11