6.6 方向导数和梯度

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

方向导数

一阶偏导数：函数沿相应坐标轴正向的变化率

方向导数：函数沿某一方向的变化率

方向导数

方向的刻画：方向余弦 $(\cos\alpha, \cos\beta)$

- 对于任意一个向量

$$\vec{l} = (l_1, l_2)$$

其方向向量就是沿着该方向的单位向量

$$\vec{l_0} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{1}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}(l_1, l_2)$$

- $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$

$$(\cos\alpha, \cos\beta) = \vec{l_0} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$$

方向导数

定义（方向导数）：对于点 $P_0(x_0, y_0)$ 和方向 $\vec{l}$，方向余弦记为 $(\cos\alpha, \cos\beta)$，若极限

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

存在，则称该极限值为 $z = f(x, y)$ 在点 P_0 沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0, y_0)}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0, y_0)}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}$$

方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\bigg|_{(x_0,y_0)} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

- 几何含义：函数沿方向 $\vec{l}$（方向余弦 $(\cos\alpha,\cos\beta)$）的变化率
  - 考虑直线

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\cos\beta \end{cases}$$

  - 极限的分母：点 $P_t(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)$ 与点 $P_0(x_0,y_0)$ 的有向距离
  - 极限的分子：函数值在点 P_t 和 P_0 取值的差
- 方向导数与向量 $\vec{l}$ 的模无关（计算方向导数时一定注意用模为 1 的向量）
- 偏导数是方向导数的特例：若 $\mathbf{a}=(1,0)$，$\mathbf{b}=(0,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{b}} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

方向导数

定理：若函数可微，则该函数沿任意一个方向的方向导数都存在，并且（若 $\vec{l}$ 的方向余弦为 $(\cos\alpha, \cos\beta)$）

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0} = f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\cos\beta$$

方向导数

例 1：求 $f(x,y)=x^3y$ 在点 $P_0(1,2)$ 处沿从 P_0 到点 $P(1+\sqrt{3},3)$ 方向的方向导数

方向导数

例 2： 求 $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ 在点 $P_0(1,1,1)$ 处沿方向 $\vec{l}=(1,3,1)$ 的方向导数

方向导数

- 可微 $\Rightarrow$ 可求方向导数
- 可求方向导数 $\not\Rightarrow$ 可微（事实上，可求方向导数 $\not\Rightarrow$ 连续）

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases},\qquad g(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

梯度

梯度：方向导数最大的方向，记为 $\mathbf{grad} f$

- 方向导数的向量内积运算：对于 C^1 函数，考虑向量

$$\mathbf{g} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)), \quad \vec{l}_0 = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = (\cos\alpha, \cos\beta), \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = f_x \cos\alpha + f_y \cos\beta = \mathbf{g} \cdot \vec{l}_0$$

- $\vec{l}_0$ 和 $\mathbf{g}$ 同向时，方向导数最大；反向时，方向导数最小

$$\mathbf{grad} f\Big|_{P_0} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)), \quad \mathbf{grad} f = (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

- 梯度是一个向量
- 含义：
  - 沿梯度方向，方向导数最大，函数增长最快
  - 沿负梯度方向，方向导数最小，函数减小最快
  - 若梯度是 $\mathbf{0}$？

梯度

二元函数

$$\mathbf{grad} f = (f_x, f_y)$$

三元函数

$$\mathbf{grad} f = (f_x, f_y, f_z)$$

n 元函数

$$\mathbf{grad} f = (f_{x_1}, f_{x_2}, \cdots, f_{x_n})$$

梯度

对于函数 u, v, f 和常数 c:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{grad}(u \pm v) &= \mathbf{grad}\, u \pm \mathbf{grad}\, v \\
\mathbf{grad}(cu) &= c\ \mathbf{grad}\, u \\
\mathbf{grad}(uv) &= v\ \mathbf{grad}\, u + u\ \mathbf{grad}\, v \\
\mathbf{grad}\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{1}{v^2}\left(v\ \mathbf{grad}\, u - u\ \mathbf{grad}\, v\right) \\
\mathbf{grad}(f(u, v)) &= \frac{\partial f}{\partial u}\ \mathbf{grad}\, u + \frac{\partial f}{\partial v}\ \mathbf{grad}\, v
\end{aligned}
$$

作业

习题 6.6： 1, 6, 8