6.7 多元函数的微分中值定理与泰勒公式

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

微分中值定理

一元函数：$y = f(x)$，存在 $c \in (a, b)$，使得

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$$

多元函数：

$$f(\text{点}2) = f(\text{点}1) + (\text{两点连线上某点的导数}) \times (\text{点}2 - \text{点}1)$$

- 思路：通过引入参数，将多元函数转化成沿两点连线的一元函数，再应用一元函数的对应定理

微分中值定理

定理（拉格朗日中值定理）： **函数** $z = f(x, y) \in C^1(D)$，**设** D **中两个点** $P_0(x_0, y_0)$ **和** $P_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ **的连线在** D **内，则存在** $\theta \in (0, 1)$，**使得**

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0, y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y$$

微分中值定理

三元函数：区域上 C^1 + 连线在区域内 $\Longrightarrow$ 存在 $\theta \in (0,1)$ 使得

$$f(P_1) = f(P_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(P_\theta)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(P_\theta)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(P_\theta)\Delta z$$

$$P_0(x_0, y_0, z_0), \quad P_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z), \quad P_\theta(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y, z_0 + \theta\Delta z)$$

多元函数：区域上 C^1 + 连线在区域内 $\Longrightarrow$ 存在 $\theta \in (0,1)$ 使得

$$f(\text{点}2) = f(\text{点}1) + (\text{两点连线上某点的梯度}) \cdot (\text{点}2 - \text{点}1)$$

$$f(P_1) = f(P_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_\theta)\Delta x_i = f(P_0) + \mathbf{grad} f\Big|_{P_\theta} \cdot \Delta \mathbf{x}$$

微分中值定理

推论： 偏导数恒为 0 的函数是常值函数

泰勒公式

一元函数：$y = f(x)$，存在 ξ 介于 x_0 和 x 之间，使得

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) &+ \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \\
&+ \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}
\end{aligned}
$$

泰勒公式

定理（带拉格朗日余项的泰勒公式）：函数 $z = f(x, y) \in C^{n+1}(D)$，设 D 中两个点 $P_0(x_0, y_0)$ 和 $P_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 的连线在 D 内，则存在 $\theta \in (0, 1)$，使得

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^{\,2} f(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!} d^{\,n} f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{\,n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)$$

$$d^{\,k} f = \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f$$

泰勒公式

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^{\,2}f(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^{\,n}f(x_0, y_0) + R_n$$

- 等式右边去掉 R_n 称为 n 阶泰勒多项式
- 余项 R_n:
  - 拉格朗日余项:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}d^{\,n+1}f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y), \quad \exists\, \theta \in (0,1)$$

  - 佩亚诺余项:

$$R_n = o(\rho^n) \quad (\rho \to 0), \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

  - 积分余项:

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n d^{\,n+1}f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)dt$$

泰勒公式

m 元函数：区域上 C^{n+1}+ 连线在区域内 $\Longrightarrow$ 存在 $\theta \in (0,1)$ 使得

$$f(P_1) = f(P_0) + \frac{1}{1!}df(P_0) + \frac{1}{2!}d^{\,2}f(P_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^{\,n}f(P_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{\,n+1}f(P_\theta)$$

$$d^{\,k}f = \left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \Delta x_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^k f$$

$$P_\theta = P_0 + \theta(P_1 - P_0)$$

泰勒公式

定理：多元函数的泰勒公式具有唯一性

计算泰勒公式的两种方法：

1. 计算各阶偏导数，根据定义写出泰勒公式
2. 通过简单泰勒公式的四则运算和复合进行计算

泰勒公式

例：求 $f(x, y) = e^{-x} \ln(1 + x + y)$ 在 $(0, 0)$ 处展开至二次项的泰勒公式

作业

习题 6.7： 1, 2(3), 5