6.8 隐函数存在定理

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

隐函数存在定理

问题：

1. 能否从一个方程中解出其中一个变量

$$F(x,y)=0 \implies y=f(x)?$$

$$F(x,y,z)=0 \implies z=f(x,y)?$$

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \implies \begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases} ?$$

2. 能否求导？如何求导？

一个方程

$$F(x, y) = 0$$

线性方程:

$$ax + by = 0$$

- 要能解出 y，要求 $b \neq 0$

一个方程

定理（隐函数存在定理）：设 $F(x,y)$ 满足

1. $F(x_0,y_0)=0$
2. $F(x,y)$ 有连续的一阶偏导数
3. $F_y(x_0,y_0)\neq 0$

则

1. 存在点 x_0 的一个邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，使得在这个邻域内存在唯一的函数 $y=f(x)$ 满足
$$F(x,f(x))=0$$
2. 函数 $y=f(x)$ 有连续的导数，且
$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\quad (y=f(x))$$

一个方程

例 1： 求方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

在点 $(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$ 附近隐函数的存在唯一性，并求导

一个方程

$$F(x,y,z)=0$$

线性方程：

$$ax+by+cz=0$$

- 要能解出 z，要求 $c\neq 0$

一个方程

定理（隐函数存在定理）：设 $F(x, y, z)$ 满足

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
2. $F(x, y, z)$ 有连续的一阶偏导数
3. $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

则

1. 存在点 (x_0, y_0) 的一个邻域，使得在这个邻域内存在唯一的函数 $z = f(x, y)$ 满足
$$F(x, y, f(x, y)) = 0$$
2. 函数 $z = f(x, y)$ 有连续的一阶偏导数，且
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}$$

一个方程

$$F(x_1, \cdots, x_n, y) = 0$$

- 条件:
  1. $F(x_1^0, \cdots, x_n^0, y^0) = 0$
  2. $F(x_1, \cdots, x_n, y)$ 有连续的一阶偏导数
  3. $F_y(x_1^0, \cdots, x_n^0, y^0) \neq 0$
- 结论
  1. $F(x_1, \cdots, x_n, y)$ 在某个邻域内可求解，得到 $y = f(x_1, \cdots, x_n)$
  2. $y = f(x_1, \cdots, x_n)$ 可按隐式求导方法求偏导数

一个方程

例 2：求方程

$$xy + yz + e^{xz} = 3$$

所确定的隐函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数

一个方程

例 3： 求方程

$$F(x-y, y-z)=0$$

所确定的隐函数 $z=f(x, y)$ 的偏导数

一个方程

例 4：求方程

$$e^x \sin y + yz + e^z + 5 = 0$$

所确定的隐函数 $z = f(x, y)$ 的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

两个方程

$$\begin{cases} F(x,u,v) = 0 \\ G(x,u,v) = 0 \end{cases}$$

线性方程组:

$$\begin{cases} au + bv = e \\ cu + dv = f \end{cases}$$

- 存在唯一解 (u, v) 的充分必要条件:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

- 克拉默法则:

$$u = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} \bigg/ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad v = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} \bigg/ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

两个方程

$$\begin{cases} F(x, u, v) = 0 \\ G(x, u, v) = 0 \end{cases}$$

定义（雅可比行列式）:

$$J = \frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

两个方程

定理： 设 $F(x,u,v), G(x,u,v)$ 满足

1. $F(x_0,u_0,v_0)=G(x_0,u_0,v_0)=0$
2. $F(x,u,v), G(x,u,v)$ 有连续的一阶偏导数
3. 雅可比行列式 $\frac{D(F,G)}{D(u,v)}$ 在点 (x_0,u_0,v_0) 处不等于 0

则

1. 存在点 x_0 的一个邻域，使得在这个邻域内存在唯一的函数 $u=u(x), v=v(x)$ 满足
$$F(x,u(x),v(x))=G(x,u(x),v(x))=0$$
2. 函数 $u(x), v(x)$ 有连续的导数，且
$$\begin{aligned} F_x+F_u u'+F_v v'=0 \\ G_x+G_u u'+G_v v'=0 \end{aligned}$$

两个方程

定理：设 $F(x,y,u,v)$, $G(x,y,u,v)$ 满足

1. $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$
2. $F(x,y,u,v)$, $G(x,y,u,v)$ 有连续的一阶偏导数
3. 雅可比行列式 $\frac{D(F,G)}{D(u,v)}$ 在点 (x_0,y_0,u_0,v_0) 处不等于 0

则

1. 存在点 (x_0,y_0) 的一个邻域，使得在这个邻域内存在唯一的函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 满足

$$F(x,y,u(x,y),v(x,y))=G(x,y,u(x,y),v(x,y))=0$$

2. 函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 有连续的偏导数，可通过隐式求导方式计算

两个方程

例 5:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - uv = 0 \\ xy + u^2 - v^2 = 0 \end{cases}$$

两个方程

例 6：求 u_{xx}

$$\begin{cases} x = e^u + v \\ xy = e^u + u \end{cases}$$

逆映射存在定理

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

问题：逆映射是否存在，即反解出 (u, v) 关于 (x, y) 的表达式？

结论：这样的逆映射存在唯一，只要雅可比行列式

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$$

- 推论：此时该映射是一一映射

逆映射存在定理

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

逆映射的导数：

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{1}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}$$

逆映射存在定理

$$\begin{cases} x_1 = x_1(u_1, \cdots, u_n) \\ x_2 = x_2(u_1, \cdots, u_n) \\ \qquad\vdots \\ x_n = x_n(u_1, \cdots, u_n) \end{cases}$$

结论：可以反解出唯一的逆映射 $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto (u_1, \cdots, u_n)$，**只要雅可比行列式**

$$\frac{D(x_1, \cdots, x_n)}{D(u_1, \cdots, u_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

作业

习题 6.8：3, 5, 8, 10, 11