6.9 极值问题

安冬

北京大学北京国际数学研究中心（BICMR）

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 1 学期

一元函数极值问题

$$y = f(x)$$

极值点：在 x_0 的某个邻域内 $f(x_0)$ 最大/最小

- 必要条件：$f'(x_0) = 0$（此时的 x_0 称为稳定点）
- 充分条件：$f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0) \neq 0$（$f''(x_0)$ 的正负决定是极大还是极小值点）

二元函数极值问题

$$z = f(x, y)$$

极值点：设 (x_0, y_0) 为内点，若存在 (x_0, y_0) 的一个邻域 U，使得对于任意的 $(x, y) \in U$，都有

1. $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$，则称 (x_0, y_0) 为极大值点
2. $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$，则称 (x_0, y_0) 为极小值点

- 极值点是区域的内点
- 极值和极值点都是局部性质

例：

$$f(x, y) = y^2 + x^2 - x^4 \qquad g(x, y) = xy$$

二元函数极值问题

定理（极值的必要条件）：若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 达到极值，且 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 存在，则必有

$$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$$

- 该条件可写为 $\mathbf{grad} f(x_0,y_0)=\mathbf{0}$
- 推论：可微函数在极值点处任意方向的方向导数都是 0
- 稳定点：满足 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$ 的点
  - 对于可微函数，极值点一定是稳定点，稳定点不一定是极值点
- 可推广到多元函数：可微 n 元函数的极值点 P_0 满足 $f_{x_1}(P_0)=\cdots=f_{x_n}(P_0)=0$

二元函数极值问题

定理：设函数 $f(x,y)$ 满足

1. 有连续的二阶偏导数
2. (x_0,y_0) 是一个稳定点（即 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$）

记

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0),\quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0),\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

则

1. 若 $B^2<AC$，则 (x_0,y_0) 是极值点，且
   - 1.1 若 $A>0$，则 (x_0,y_0) 是极小值点
   - 1.2 若 $A<0$，则 (x_0,y_0) 是极大值点
2. 若 $B^2>AC$，则 (x_0,y_0) 不是极值点
3. 若 $B^2=AC$，则 (x_0,y_0) 可能是也可能不是极值点

二元函数极值问题

例 1：求函数的稳定点，并判别是否是极值点

$$f(x, y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + xy$$

二元函数极值问题

例 2：求函数的稳定点，并判别是否是极值点

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$$

多元函数极值问题

二元函数的海森矩阵：

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

- 二元函数极值的充分条件与海森矩阵的性质有关

多元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的海森矩阵：

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

二元函数最值问题

最值问题：考虑极值点 $+$ 边界点

- 边界点的讨论有时会需要求解额外的一元函数最值问题
- 特殊情况：若可以事先保证函数在区域内部一定有最值，且只有唯一的稳定点，则这个点必为最值点

条件极值

问题：考虑函数

$$z = f(x, y)$$

在约束条件

$$\varphi(x, y) = 0$$

下的极值

条件极值

拉格朗日乘数法：为了求函数 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的条件极值，考虑辅助函数

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

则 $F(x,y,\lambda)$ 的稳定点即为约束条件下 $f(x,y)$ 的稳定点

$$\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ F_\lambda = \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

条件极值

三元函数一个约束：为了求函数 $f(x,y,z)$ 在约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下的条件极值，考虑辅助函数

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$$

则 $F(x,y,z,\lambda)$ 的稳定点即为约束条件下 $f(x,y,z)$ 的稳定点

n 元函数 m 个约束：为了求函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在约束条件 $\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$，$\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$，$\cdots$，$\varphi_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 下的条件极值，考虑辅助函数

$$F(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=f(x_1,\cdots,x_n)+\lambda_1\varphi_1(x_1,\cdots,x_n)+\cdots+\lambda_m\varphi_m(x_1,\cdots,x_n)$$

则 F 的稳定点即为约束条件下 f 的稳定点

条件极值

例 3：求函数 $f(x, y, z) = xyz$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $(x, y, z > 0)$ 上的最大值

条件极值

例 4：求平面 $x+y+z=1$ 截圆柱面 $x^2+y^2=1$ 的截痕上离原点最近及最远的点

作业

习题 6.9： 1(3)(5), 2, 6, 8, 10