

作业 1

(如无特殊说明, 不含下标的范数记号 $\|\cdot\|$ 表示矩阵/向量 2 范数)

1. 考虑图1中的量子线路.

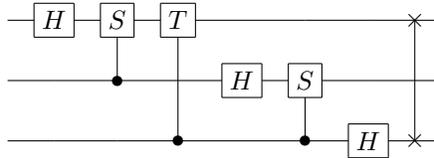


Figure 1:

- (1) 若输入态为 $|000\rangle$, 计算输出态.
- (2) 若输入态为 $|111\rangle$, 计算输出态.

2. 证明: 若 U_A 为矩阵 A 的一个 (α, a, ϵ) -block-encoding, 那么对于任意的 $\beta > 0$, 都存在一个 ϵ' 使得 U_A 为矩阵 A/β 的一个 $(\alpha/\beta, a, \epsilon')$ -block-encoding. 并给出 ϵ' 的表达式.

3.

- (1) 设 u, v 为两个非零向量, 试证明

$$\left\| \frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|} \right\| \leq 2 \frac{\|u - v\|}{\|u\|}.$$

- (2) 设 $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^{2^n}$ 是一个量子态, O_ψ 是 $|\psi\rangle$ 的态制备 oracle, $A \in \mathbb{C}^{2^n \times 2^n}$ 是一个矩阵, U_A 是 A 的 (α, a, ϵ) -block-encoding. 请写出一个以 $|0^a\rangle|0^n\rangle$ 为初始状态的近似计算 $A|\psi\rangle/\|A|\psi\rangle\|$ 的量子算法, 并给出误差估计 (即算法成功时实际输出的量子态与 $A|\psi\rangle/\|A|\psi\rangle\|$ 的距离的上界).

4. 设 $A = (A_{ij}) \in \mathbb{C}^{N \times N}$ 是一个稀疏度为 s 的稀疏矩阵. 定义 $\|A\|_{\max} = \max_{i,j} |A_{ij}|$. 试证明

$$\|A\| \leq s\|A\|_{\max}.$$

5. 设 $a_j (0 \leq j \leq N-1)$ 为 N 个模长不大于 1 的复数, 并假设我们已知一个酉变换 U_a 满足

$$U_a : |j\rangle|0\rangle \mapsto |j\rangle|a_j\rangle.$$

试构造对角矩阵 $A = \text{diag}(a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ 的一个 block-encoding. (提示: 考虑正交基的复制操作, 并参考构造稀疏矩阵 block-encoding 的方法)

6. 考虑 Fig. 2 中的量子线路, 其中 $|\psi\rangle$ 是一个量子态, U 是一个酉矩阵.

- (1) 试说明如何利用该线路估计 $\text{Im}\langle\psi|U|\psi\rangle$.
- (2) 如果我们想要以不低于 $1 - \delta$ 的概率得到 $\text{Im}\langle\psi|U|\psi\rangle$ 的一个误差不超过 ϵ 的估计 (其中 δ 和 ϵ 为两个很小的正参数), 试估计需要重复 Fig. 2 的次数.

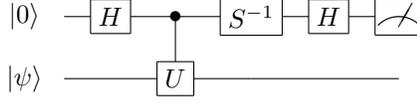


Figure 2:

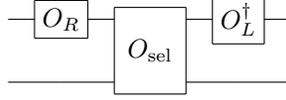


Figure 3:

7. 给定 J 个酉矩阵 U_j 和 J 个复数 c_j . 记

$$O_L : |0\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{\|\vec{c}\|_1}} \sum_{j=0}^{J-1} \sqrt{c_j} |j\rangle, \quad O_R : |0\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{\|\vec{c}\|_1}} \sum_{j=0}^{J-1} \sqrt{c_j} |j\rangle,$$

$$O_{\text{sel}} = \sum_{j=0}^{J-1} |j\rangle \langle j| \otimes U_j,$$

其中 \sqrt{z} 为复数的根号函数主值分支, \bar{z} 表示复数的共轭. 考虑 Fig. 3 中的量子线路. 试说明该线路给出了 $\sum_{j=0}^{J-1} c_j U_j$ 的一个 (α, a, ϵ) -block-encoding, 并说明 α, a, ϵ 的值.

8. 在本题中我们将尝试构造一个矩阵指数的量子算法, 并分析其计算复杂度. 为了简单起见, 我们考虑一个酉变换 U , 并考虑它的矩阵指数

$$\exp(U) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} U^k.$$

算法的核心思想为, 我们采用 LCU 实现

$$\sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{k!} U^k,$$

其中 K 是一个正整数. 当 K 充分大时, 这会是 $\exp(U)$ 的一个足够好的逼近 (为了简单起见, 我们可以取 K 是 2 的幂次, 这总可以通过进一步增大 K 来实现)

(1) (Prepare oracle) 试写出 $\vec{c} = (1/0!, 1/1!, 1/2!, 1/3!, \dots, 1/(K-1)!)^T$ 对应的量子态制备 oracle 的定义 (注意归一化参数). 在本题目的剩余部分我们将这一 oracle 记为 O_{prep} .

(2) (Select oracle) 记

$$O_{\text{sel}} = \sum_{k=0}^{K-1} |k\rangle \langle k| \otimes U^k.$$

对于任意的指标 k , 我们记它的二进制表示为 $k = (d_{\log_2 K-1} \dots d_1 d_0)_2 = \sum_{i=0}^{\log_2 K-1} d_i 2^i$, 同样对应的量子计算基态为 $|k\rangle = |d_{\log_2 K-1}\rangle \dots |d_1\rangle |d_0\rangle$. 试证明 Fig. 4 中的量子线路恰好实现了 O_{sel} , 并计算该线路关于 U 的访问复杂度.

(3) (LCU) 基于 O_{prep} 和 O_{sel} , 请写出一个实现 $\sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{k!} U^k$ 的 $(\alpha, a, 0)$ -block-encoding 的量子线路, 并指出对应的 α 和 a 的取值.

(4) (误差估计) 对于任意给定的 $\epsilon > 0$, K 至少要取多大才能保证在第 (3) 问中构造的量子线路是 $\exp(U)$ 的一个 (α, a, ϵ) -block-encoding (提示: 考虑建立 $\left\| \exp(U) - \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{k!} U^k \right\|$ 的一个上界)?

(5) (复杂度分析) 整个算法关于 U 的访问复杂度是多少 (结果用 ϵ 表示)?

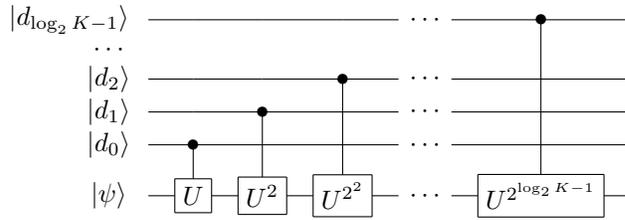


Figure 4:

至此，我们构造了一个计算 $\exp(U)$ 的量子算法。一些额外的思考题（仅作为拓展，无需在作业中回答下面这些问题）：

- (1)* 实现 Prepare oracle O_{prep} 的计算复杂度是多少？
- (2)* 对于一个厄米矩阵 H 满足 $\|H\| \leq 1$ ，以及一个正实数 $T > 1/\|H\|$ ，假设我们已知 H 的一个 block-encoding，那么 $\exp(-iHT)$ 要如何实现？总的计算复杂度是如何依赖于 T 的？
- (3)* 对于一个一般的矩阵 A 和正实数 $T > 0$ ， $\exp(AT)$ 要如何实现？它的计算复杂度如何？