

## 作业 2

(如无特殊说明, 不含下标的范数记号  $\|\cdot\|$  表示矩阵/向量 2 范数)

1. (QSP, W-convention) 我们课上介绍了基于旋转矩阵  $O(x)$  和 Pauli Z 旋转门的 QSP, 这一结论通常被称为 O-convention QSP. 事实上, QSP 还有多个相互等价的版本. 在本题中, 我们将证明被称为 W-convention 的 QSP, 并分析它与 O-convention QSP 的联系.

(1) 设  $x$  是绝对值不大于 1 的实数,  $Z$  为 Pauli Z 矩阵,

$$W(x) = \begin{pmatrix} x & i\sqrt{1-x^2} \\ i\sqrt{1-x^2} & x \end{pmatrix}.$$

对于非负整数  $d$ , 实向量  $\Phi^W = (\phi_0^W, \phi_1^W, \dots, \phi_d^W) \in \mathbb{R}^{d+1}$ , 记

$$U_{\Phi^W}(x) = e^{i\phi_0^W Z} W(x) e^{i\phi_1^W Z} W(x) e^{i\phi_2^W Z} \dots W(x) e^{i\phi_d^W Z} = e^{i\phi_0^W Z} \prod_{j=1}^d (W(x) e^{i\phi_j^W Z}).$$

试证明: 存在  $\Phi^W \in \mathbb{R}^{d+1}$  使得

$$U_{\Phi^W}(x) = \begin{pmatrix} P(x) & iQ(x)\sqrt{1-x^2} \\ iQ^*(x)\sqrt{1-x^2} & P^*(x) \end{pmatrix}$$

的充分必要条件是  $P(x), Q(x)$  是两个复系数多项式, 且满足

- (a)  $\deg(P) \leq d, \deg(Q) \leq d-1$ ,
- (b)  $P$  具有  $d \bmod 2$  parity,  $Q$  具有  $(d-1) \bmod 2$  parity,
- (c)  $|P(x)|^2 + (1-x^2)|Q(x)|^2 = 1, \forall x \in [-1, 1]$ .

(注: 不能直接引用课上介绍的 O-convention QSP 结论来证明本小问)

(2) 请说明如何基于第 (1) 问中的 W-convention QSP 结论来构造  $P(A)$  的 block-encoding, 其中  $P(x)$  是一个满足第 (1) 问中所有条件的多项式,  $A$  是一个厄米矩阵, 满足  $\|A\| \leq 1$ . (注: 在回答中请详细写出 qubitization 的过程)

(3) 请写出第 (1) 问 W-convention QSP 中的  $\Phi^W$  与我们课上介绍的 O-convention QSP 中的  $\Phi$  的关系.

2. (酉矩阵对数的量子算法)

(1) 试证明: 对于任意的  $\epsilon \in (0, 1/2]$ , 存在一个次数为  $d = \mathcal{O}(\log(1/\epsilon))$  的实系数奇多项式  $p(x)$ , 满足

$$\sup_{x \in [-1/2, 1/2]} \left| p(x) - \frac{2}{\pi} \arcsin(x) \right| \leq \epsilon, \quad \sup_{x \in [-1, 1]} |p(x)| \leq 1.$$

(提示: 考虑  $\arcsin(x)$  在  $x=0$  的泰勒展开)

(2) 设  $H$  是一个未知的厄米矩阵, 满足  $\|H\| \leq 1/2$ , 并假设酉矩阵  $U = e^{iH}$  是已知的. 对于任意的  $\epsilon \in (0, 1/2]$ , 请基于 QSVT 设计一个实现  $H$  的  $(\alpha, a, \epsilon)$ -block-encoding 的量子算法, 指出对应的  $\alpha$  和  $a$  的值, 并分析算法关于  $U$  的访问复杂度. (提示: 考虑先用 LCU 构造  $\sin(H) = (U - U^\dagger)/(2i)$ )

