作业 3

（如无特殊说明，不含下标的范数记号 $\|\cdot\|$ 表示矩阵/向量 2 范数）

1. 在本题中，我们将考虑乘积公式在更一般的情况下的误差估计.

(1) 设 $H = H_0 + H_1$，其中每个 H_j 都是厄米矩阵. 试证明：存在常数 $c > 0$ 使得

$$\left\| e^{-iHt} - e^{-iH_0 t/2} e^{-iH_1 t} e^{-iH_0 t/2} \right\| \le c(\|[H_0,[H_0,H_1]]\| + \|[H_1,[H_1,H_0]]\|)t^3, \quad \forall t > 0.$$

(2) 设 $H = H_0 + H_1$（此时 H_j 不一定是厄米矩阵）. 试证明：存在常数 $c > 0$ 使得

$$\left\| e^{-iHt} - e^{-iH_1 t} e^{-iH_0 t} \right\| \le c e^{2(\|H_0\|+\|H_1\|)t} \|[H_0,H_1]\| t^2, \quad \forall t > 0.$$

(3) 设 $H(t) = f_0(t)H_0 + f_1(t)H_1$，其中每个 H_j 都是厄米矩阵，$f_j(t) \in C^1([0,T] \mapsto \mathbb{R})$. 试证明：

$$\left\| \mathcal{T} e^{-i\int_t^{t+\Delta t} H(s)ds} - e^{-if_1(t)H_1\Delta t} e^{-if_0(t)H_0\Delta t} \right\| \le \mathcal{O}(\Delta t^2),$$

并举例说明即使 H_0 和 H_1 可交换，含时一阶 Trotter 公式的误差也可能不为 0.

2. 设 $H(t)$ 是一个含时连续可微哈密顿量. 我们考虑利用一阶截断 Dyson 设计一个含时哈密顿量模拟的量子算法：

$$\mathcal{T} e^{-i\int_0^t H(s)ds} \approx I - i\int_0^t H(s)ds.$$

(1) 对于积分项 $\int_0^t H(s)ds$，我们考虑一阶近似

$$\int_0^t H(s)ds \approx \frac{t}{M}\sum_{j=0}^{M-1} H(jt/M).$$

假设我们已知 $H(s)$ 的含时 block-encoding（也叫 HAM-T 模型），定义为

$$U_H = \sum_{j=0}^{M-1} |j\rangle\langle j| \otimes V_j,$$

其中 V_j 是 $H(jt/M)$ 的 $(\alpha, a, 0)$-block-encoding，$\alpha \ge \max_s \|H(s)\|$. 试构造一个近似实现 $\int_0^t H(s)ds$ 的 block-encoding 的算法，并说明对应的 block-encoding rescaling 参数和辅助量子比特数量.

(2) 试构造一个近似实现 $\mathcal{T} e^{-i\int_0^t H(s)ds}$ 的 block-encoding 的算法，说明对应的 block-encoding rescaling 参数和辅助量子比特数量.

(3) 对于一个较大的 T，请说明如何基于一阶截断 Dyson 构造一个近似实现 $\mathcal{T} e^{-i\int_0^T H(s)ds}$ 的量子算法，使得算法的访问复杂度关于 T 的依赖至多是多项式级（简单说明算法的关键步骤和多项式级别复杂度的原因即可，无需详细的线路或复杂度分析）.

3. 考虑线性方程组 $Ax = b$，其中 A 是一个 N 维方阵，满足 $\|A\| = 1$，b 是一个 N 维向量，满足 $\|b\| = 1$. 在本题中，我们将考虑 HHL 算法的一些推广.

(1) 假设 A 是可逆厄米矩阵，条件数为 κ. 试说明如何利用 HHL 估计 $\|A^{-1}b\|$，并分析算法的访问复杂度.

(2) 假设 A 是厄米矩阵（但不一定可逆），最小非零奇异值为 $\sigma_{\min}$，并假设 b 在 A 的列空间内. 试说明如何利用 HHL 求线性方程组 $Ax = b$ 的一个解（简单说明与标准 HHL 的区别即可，无需详细的线路或复杂度分析）.

4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个分块矩阵

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} C_{00} & C_{01} & \cdots & C_{0,p-1} \\ C_{10} & C_{11} & \cdots & C_{1,p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{p-1,0} & C_{p-1,1} & \cdots & C_{p-1,p-1} \end{pmatrix},$$

其中每个 $C_{i,j}$ 都是维数相同的方阵. 请证明:

$$\|\mathcal{C}\| \le \sqrt{\left(\max_i \sum_{k=0}^{p-1} \|C_{i,k}\|\right)\left(\max_j \sum_{k=0}^{p-1} \|C_{k,j}\|\right)}.$$

5. 设 $A = L + iH$ 是一个 N 维方阵，其中 $L = \frac{A+A^\dagger}{2}$, $H = \frac{A-A^\dagger}{2i}$. 请证明：对于任意的 $t \in \mathbb{R}$，都有

$$\left\|e^{-At}\right\| \le \left\|e^{-Lt}\right\|.$$

6. 考虑线性 ODE

$$\frac{du}{dt} = Au + b, \quad u(0) = u_0.$$

其中 A 是一个 N 维方阵，满足 $A + A^\dagger \preceq 0$，b 和 u_0 是 N 维单位向量.

(1) 请分别写出如何在量子计算机上利用向前 Euler 和向后 Euler 格式求该 ODE 的历史解

$$[u(0); u(T/M); u(2T/M); \cdots ; u(T)],$$

其中 M 是时间离散步数（只需写出两个算法的关键步骤，无需具体的线路构造或复杂度分析）.

(2) 假设 $A \equiv a < 0$ 是一个实数（即维数 $N = 1$），且进一步假设 $a < 0$. 请证明：对于充分大的时间步数 M 和演化时间 T，使用向前 Euler 求历史解对应的线性方程组的条件数为

$$\mathcal{O}\left(\frac{M}{|a|T}\right).$$