

科学计算中的量子算法：量子相位估计

安冬

北京大学北京国际数学研究中心 (BICMR)

andong@bicmr.pku.edu.cn

25-26 学年第 2 学期

量子相位估计 (QPE)

U 是一个酉矩阵, $|\psi\rangle$ 是它的一个特征向量, 满足:

$$U|\psi\rangle = e^{i2\pi\phi} |\psi\rangle, \quad \phi \in [0, 1)$$

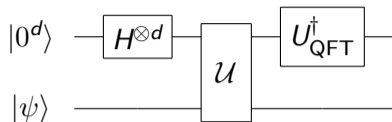
目标: 求 ϕ

QPE: 精确情况

假设 ϕ 可以被 d 位二进制精确表示:

$$\begin{aligned}\phi &= (0.\phi_{d-1} \cdots \phi_1 \phi_0)_2 \\ \iff \exists k \in [2^d] \quad \text{s.t.} \quad \phi &= \frac{k}{2^d}\end{aligned}$$

QPE: 精确情况



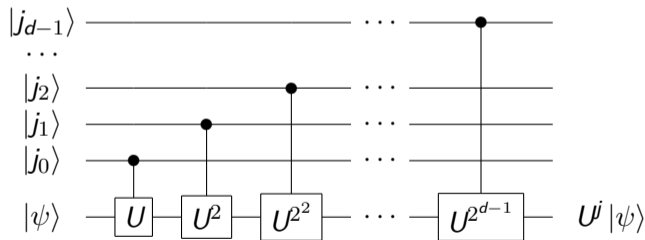
$$U = \sum_{j \in [2^d]} |j\rangle \langle j| \otimes U^j$$

$$\begin{aligned} |0^d\rangle |\psi\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2^d}} \sum_{j \in [2^d]} |j\rangle |\psi\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2^d}} \sum_{j \in [2^d]} |j\rangle U^j |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^d}} \sum_{j \in [2^d]} |j\rangle e^{i2\pi\phi j} |\psi\rangle \\ &\rightarrow \frac{1}{2^d} \sum_{j \in [2^d]} \left(\sum_{k' \in [2^d]} e^{-i2\pi j k' / 2^d} |k'\rangle \right) e^{i2\pi\phi j} |\psi\rangle \\ &= \sum_{k' \in [2^d]} \left(\frac{1}{2^d} \sum_{j \in [2^d]} e^{i2\pi j(\phi - k' / 2^d)} \right) |k'\rangle |\psi\rangle = |k\rangle |\psi\rangle \end{aligned}$$

QPE: 精确情况

$$j = (j_{d-1} \cdots j_1 j_0)_2 = \sum_{l=0}^{d-1} j_l 2^l$$

$$\mathcal{U} = \sum_{j \in [2^d]} |j\rangle \langle j| \otimes U^j = \sum_{j_{d-1}, \dots, j_0} (|j_{d-1}\rangle \langle j_{d-1}| \otimes \cdots \otimes |j_0\rangle \langle j_0|) \otimes \prod_{l=0}^{d-1} (U^{2^l})^{j_l}$$



访问复杂度: $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{d-1} = \mathcal{O}(2^d)$

QPE: 近似情况

$$U|\psi\rangle = e^{i2\pi\phi} |\psi\rangle, \quad \phi \in [0, 1)$$

1. ϕ 不一定有精确 d 位二进制表示
2. $|\psi\rangle$ 不一定是精确的特征向量
3. U 的实现可能有误差

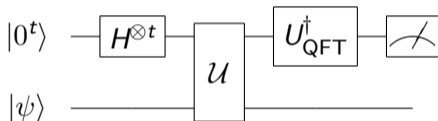
我们接下来分别分析 1 和 3 的情况

QPE: 近似情况

对于一般的 $\phi \in [0, 1)$, 希望找到一个误差不超过 $\epsilon = 2^{-d}$ 的近似

$$|\theta|_1 = \min \{(\theta \bmod 1), 1 - (\theta \bmod 1)\}$$

思路: 取足够多 ($t > d$) 的辅助量子比特, 使得需要的部分振幅足够大



$$|0^t\rangle |\psi\rangle \rightarrow \sum_{k' \in [T]} \left(\frac{1}{T} \sum_{j \in [T]} e^{i2\pi j(\phi - k'/T)} \right) |k'\rangle |\psi\rangle$$

QPE: 近似情况

$$|0^t\rangle |\psi\rangle \rightarrow \sum_{k' \in [T]} \left(\frac{1}{T} \sum_{j \in [T]} e^{i2\pi j(\phi - k'/T)} \right) |k'\rangle |\psi\rangle = \sum_{k' \in [T]} \gamma_{k'} |k'\rangle |\psi\rangle$$

$$\gamma_{k'} = \frac{1}{T} \sum_{j \in [T]} e^{i2\pi j(\phi - k'/T)} = \frac{1}{T} \frac{1 - e^{i2\pi T(\phi - k'/T)}}{1 - e^{i2\pi(\phi - k'/T)}}$$

$$\mathbb{P}(k') = |\gamma_{k'}|^2 = \frac{1}{T^2} \frac{\sin^2(\pi T(\phi - k'/T))}{\sin^2(\pi(\phi - k'/T))} \leq \frac{1}{4T^2 |\phi - k'/T|_1^2}$$

QPE: 近似情况

记测量之后的第一个寄存器变为 $|\tilde{k}\rangle$, 对应的特征值估计为 \tilde{k}/T

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\phi - \tilde{k}/T|_1 \geq \epsilon) &= \sum_{k': |\phi - k'/T|_1 \geq \epsilon} \mathbb{P}(k') \leq \sum_{k': |\phi - k'/T|_1 \geq \epsilon} \frac{1}{4T^2 |\phi - k'/T|_1^2} \\ &\leq \frac{1}{2T} \int_x^\infty \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2T^2 \epsilon^2} = \frac{1}{2T\epsilon} + \frac{1}{2(T\epsilon)^2} \leq \frac{1}{T\epsilon}\end{aligned}$$

为了保证算法至少以 $1 - \delta$ 的概率成功, 我们可以取 $T = 1/(\epsilon\delta)$

- ▶ 访问复杂度: $\mathcal{O}(T) = \mathcal{O}(1/(\epsilon\delta))$
- ▶ 额外的量子比特数量: $t = d + \log_2(1/\delta)$

QPE: 酉矩阵的误差

考虑 U 的实际量子线路实现 \tilde{U} , 满足

$$\|\tilde{U} - U\| \leq \epsilon$$

Theorem (Theorem VI.3.11¹)

设 U 和 \tilde{U} 是两个酉矩阵, λ_j 和 $\tilde{\lambda}_j$ 是它们的特征值 (经过适当的重排), 那么

$$|\tilde{\lambda}_j - \lambda_j| \leq \|\tilde{U} - U\|$$

¹Rajendra Bhatia. Matrix Analysis, volume 169 of Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1997.

QPE: 酉矩阵的误差

记 $\tilde{\phi}$ 是对 \tilde{U} 做 QPE 得到的精确结果, 那么

$$\left| e^{i2\pi\tilde{\phi}} - e^{i2\pi\phi} \right| \leq \|\tilde{U} - U\| \leq \epsilon.$$

又

$$\left| e^{i2\pi\tilde{\phi}} - e^{i2\pi\phi} \right| = 2 \sin(\pi(\tilde{\phi} - \phi)) \geq 4|\tilde{\phi} - \phi|_1,$$

我们有

$$|\tilde{\phi} - \phi|_1 \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

QPE: 小结

$$U|\psi\rangle = e^{i2\pi\phi} |\psi\rangle, \quad \phi \in [0, 1)$$

访问复杂度: $\mathcal{O}(1/(\epsilon\delta))$

额外的量子比特数量: $\log_2(1/\epsilon) + \log_2(1/\delta)$

拓展:

- ▶ QPE 的初始化
- ▶ 其他版本的 QPE

阅读:

- ▶ LL: Chapter 3.4, 3.5, 3.2*